

平成 22 年 (2010 年) 度  
博士学位請求論文要旨

## Regime shift and the Term Structure of Interest Rate

一橋大学大学院 国際企業戦略研究科  
金融戦略・経営財務コース  
二見 英徳

### 1. 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。

#### 第 1 章 Introduction

##### 1.1 The purpose of the study

##### 1.2 Abstract and focus for each chapter

#### 第 2 章 Multi-factor Affine Term Structure Model with Single Regime Shift: Real Term Structure under Zero Interest Rate

##### 2.1 Introduction

##### 2.2 Affine term structure model with single regime-shift model

##### 2.3 Nominal zero-coupon bond price

When regime shift occurs at fixed times

When regime shift occurs at random times

##### 2.4 Real zero-coupon bond prices

Real EMM

Real zero-coupon bond prices

##### 2.5 Data and result of calibration

Estimated model and method

Data

Results

##### 2.6 Conclusion

##### 2.7 Appendix

Specification Analysis

Proof of proposition 1

Proof of proposition 2

## Proof of proposition 3

### 第 3 章 Regime Switching Term Structure Model under Partial Information

#### 3.1 Introduction

#### 3.2 Model

#### 3.3 Under full information

Radon-Nikodym derivative process

Zero-coupon bond price

#### 3.4 Under partial information

The posterior probability under the physical measure P

The posterior probability under the EMM Q

Radon-Nikodym derivative process

Zero-coupon bond price under partial information

#### 3.5 Numerical examples

#### 3.6 Conclusion

#### 3.7 Appendix

### 第 4 章 Option Pricing using Regime Shift Model

#### 4.1 Introduction

#### 4.2 Model

Zero-coupon bonds

#### 4.3 Option pricing under full information

Zero-coupon bond options

Caps and floors

Swaptions

#### 4.4 Option pricing under partial information

#### 4.5 Implied volatilities

#### 4.6 Numerical computation

#### 4.7 Conclusion

#### 4.8 Appendix

### 第 5 章 The Instantaneous Volatility and the Implied Volatility Surface for a Generalized Black-Scholes model

#### 5.1 Introduction

#### 5.2 Review of the first and the second generalized models

The first generalized model

- The second generalized models
- 5.3 The instantaneous volatility process
  - Propositions for the instantaneous volatility process
  - Proofs of propositions for the instantaneous volatility process
- 5.4 Some properties of the LV and the IV functions for the second model
  - An assumption and notations
  - Propositions for the LV function
  - Propositions for the IV function
  - Conjectures
  - Proofs of propositions for the LV function
  - Two lemmas
  - Proofs of propositions for the IV function
- 5.5 On the first model
- 5.6 Numerical results
  - Second model
  - First model

## 第 6 章 Conclusion

### 2. 本論文の目的

本論文は、ゼロ金利というこれまでに例のない非伝統的な金融政策の導入・解除や 100 年に一度と言われる金融危機といった歴史的な「レジームの転換」を経験することになった現在の金融市場の性質・特徴を解明するため、これを明示的に取り込んだモデルを構築し、レジームの転換が金利の期間構造に与える影響を理論的および実証的に考察するものである。

1990 年代後半から 2000 年代の日本の金融市場は激動の時代であった。未曾有のデフレにより、1999 年 2 月にこれまでに類を見ない非伝統的な金融政策であるゼロ金利政策が導入された。その後、一時景気が回復したことから、2000 年 8 月に一旦解除されるも、IT バブル崩壊により再び景気が悪化した。そのため、2001 年 3 月に再度ゼロ金利となり、併せて日銀当座預金残高に目標を設けて資金の量的拡大を図る量的緩和政策を行うこととなった。

量的緩和政策を含めたゼロ金利政策の一つの特徴は、消費者物価指数 (CPI) が継続的にゼロ以上となるまでゼロ金利政策を継続することを日本銀行が市場にコミットしていたことである。このコミットメントは将来の短期金利の経路に関する予想に働きかけることで

短期金利だけではなく中長期の金利も低く抑える時間軸効果を生み出し、金利の期間構造は短期において著しく低く、短期から中期にかけて下に凸となる特殊な形状となっていた。

量的緩和政策は、CPI が継続的にゼロ以上となったことが確認された 2006 年 3 月に解除された。しかし、この間、米国では低金利を続けたことで住宅バブルが高まっており、2007 年のサブプライム問題を契機に、徐々に景気が減速していった。そして 2008 年 9 月のリーマンショックを迎えることとなり、100 年に一度とも称される世界的な金融危機が発生した。

金融危機の前後の金融市場ではボラティリティーの非常に高い状態が継続したことが特徴の一つとしてあげられる。このようにボラティリティーの高い（あるいは低い）時期が継続するボラティリティー・クラスタリングという現象はボラティリティー自体にもレジームの転換が起こっていることを示している。

このようなレジームの転換期にある現代の金融市場における金利の期間構造の様々な特徴を解明するため、本論文ではレジームの転換を明示的に取り込んだモデルの構築を行うが、レジームの転換が金利の期間構造に与える影響を考察するに当たっては 3 つの観点が存在する。

一つ目は、名目金利と実質金利という観点である。ゼロ金利政策下における名目金利については、上述の通り、時間軸効果により期間構造が下に凸になりうるということが知られているが、実質金利あるいは期待インフレ率については期間構造がそもそも完全には形成されておらず、どのような影響を受けるのか明らかではない。これは、日本における物価連動債が初めて発行されたのが 2004 年で日が浅く、また 10 年債しか発行されていないためである。したがって、レジームの転換が実質金利にどのような影響を与えるかについては理論的な分析が必要となる。この際、名目金利と期待インフレ率のレジームの転換に連動性があるのかどうかには注意する必要がある。ゼロ金利政策における日銀のコミットメントは、期待インフレ率のレジームがプラスに転換して初めて名目金利のレジームをゼロ金利から通常の状態へ転換させることを意味しており、両者のレジーム転換に明確な関連性をもたせたものである。そのため、ゼロ金利政策下における実質金利を分析する際は、これを明示的に織り込む必要がある。

第二の観点は、レジームの転換という情報の観測可能性である。ゼロ金利政策の導入・解除と金融危機による景気循環は、同じレジームの転換ではあっても、観測可能性という観点では性質を異にしている。ゼロ金利政策のような金融政策に関するレジームの転換は、中央銀行がその政策を決定・発表するため、レジームの転換が直接観測可能である。他方、金融危機などによる景気循環などは、これにより金融政策の変更を余儀なくされるものの、中央銀行などが主体的に変更するものではないため、後から振り返ってみればそのレジームの転換を推測できるものの、当該時点においては直接観測可能ではない。前者は完全情報の状態と呼ばれ、後者は部分情報の状態と呼ばれる。これらの違いがどのような影響を

金利の期間構造に及ぼすのか検討する必要がある。

第三の観点は、ボラティリティーである。上述の通り、金融危機の金融市場では実際の金利変化から計算されるヒストリカル・ボラティリティー (HV) が非常に高い状態で推移しており、レジームの転換との関係でこれがどのように説明できるのか解明する必要がある。また、現代の金融市場は派生商品市場が極めて発達しているため、レジームの転換が金利の期間構造に与える影響の分析においては、その派生商品であるキャップやスワップションの価格及びそこから逆算されるインプライド・ボラティリティー (IV) がどのような波及効果を受けるのかについての検討も欠かせない。実際の市場では、IVの期間構造は一度上昇した後に低下するハンプという形状となることが多く、IVを行使価格に対してプロットした場合には右下がりのスキューやU字型のスマイルといった形状となることが多い。レジームの転換がIVに関するこれらの現象を説明する一つの理由となるのかどうか検討する必要がある。

本論文は上記の観点を踏まえ、レジームの転換が金利の期間構造に与える影響について考察を行うものである。そして、このような分析を通じて、現代の金融市場の性質・特徴を明らかとしていくことが本論文の目的である。

なお、本論文では、一度限りのレジームの転換を仮定した「レジーム・シフト・モデル」を考察するため、複数回のレジームの転換を仮定したモデルは「レジーム・スイッチング・モデル」と呼び分けることとする。

以下、博士論文の主要な結果について各章ごとに述べていく。

### **3 . 第 2 章 Multi-factor Affine Term Structure Model with Single Regime Shift: Real Term Structure under Zero Interest Rate**

第 2 章は、2000 年代中頃の日本におけるゼロ金利政策及び量的緩和政策の解除、すなわち金融政策の変更というレジームの転換を題材に、レジーム・シフト・モデルを応用した実質金利の期間構造の推定を行う。

ゼロ金利政策下にあった名目金利の期間構造は下に凸という特徴的な形状となっていたため、これを捉えたモデルの開発が課題で、いくつかの研究がなされている。Marumo et al. (2003) では、当初ゼロである短期金利がある時点から Ornstein-Uhlenbeck (OU) 過程に従うというゼロ金利解除モデルを提案し、下に凸の期間構造の再現に成功している。他方、実質金利の期間構造についても、物価連動国債の発行から日が浅く期間構造を形成するまでには至っていなかつたため、その推定が課題であるが、ほとんど研究が行われていない。

Ichiue and Ueno (2006) は名目金利に係るゼロ金利を表現できる Black (1995) モデルを拡張して実質金利の期間構造の推定を試みた数少ない研究の一つであるが、現実的な期

間構造の推定には成功していない。ゼロ金利政策では、CPI が継続的にゼロ以上になるまで政策を継続すると日本銀行がコミットメントしていたため、名目金利と期待インフレ率との間に関連付けがなされていたにも関わらず、これをモデルに考慮していなかったことが原因であると考えられる。

そのため本章では、日本銀行のコミットメントを表現できるようゼロ金利解除と期待インフレ率のプラス転換を関連付けたモデルを構築する。このモデルを用い、名目金利の期間構造から、ゼロ金利解除、すなわち CPI がゼロ以上になるというレジームの転換に関する情報を抽出することで、実質金利の期間構造の推定に応用することを試みる。

まず初めに、ゼロ金利解除という一度きりのレジームの転換（レジーム・シフト）を仮定した既存のゼロ金利解除モデルが、複数回のレジームの転換を仮定する一般的なアフィン型のレジーム・スイッチング・モデルのフレームワークの中に位置づけられることを示す。これにより 1 変数のレジーム・シフト・モデルを多変数のレジーム・シフト・モデルに一般化を行う。一般的な多変数のレジーム・スイッチング・モデルは割引債の解析的な評価は困難であるが、多変数のレジーム・シフト・モデルではこれが可能であることを指摘し、割引債の価格がレジームの転換時点で条件付けしたときの仮想的な割引債価格をレジームの転換時点の確率で加重平均したものとして解析解を導く。

次いで名目金利に関する多変数のレジーム・シフト・モデルに物価指数及び期待インフレ率を追加することで、実質金利のモデルに拡張する。名目金利と期待インフレ率に OU 過程を仮定し、物価指数に確率的ドリフトを持つ幾何ブラウン運動を仮定し、実質割引国債の価格付けを行い、名目割引国債と同様に解析的に評価できることを示す。期待インフレ率は、名目金利と同時にレジーム・シフトを起こすと仮定することで、期待インフレ率がデフレ・レジームから脱却してインフレ・レジームとなることで名目金利もゼロ金利を脱するとの経済的な構造を織り込むことができる点が特徴である。

上記モデルを日本の国債市場に当てはめる。実証分析では、名目金利と期待インフレ率のそれぞれの平均回帰水準が同時にレジーム・シフトする 2 変数の OU 過程を用いる。このモデルでは、名目金利の当初の平均回帰水準を十分ゼロに近づけることでゼロ金利解除が表現できる。また、比較分析として、期待インフレ率の平均回帰水準にはレジーム・シフトが発生しないモデルの推定も同時に行う。

その結果、期待インフレ率にレジーム・シフトを仮定しないモデルでは、名目金利の期間構造からはゼロ金利解除、すなわち期待インフレ率のプラスへの転換が数年先であることが示唆されるにも関わらず、すぐにインフレ率が高まる期間構造が推定され、統合的な評価ができないことを示す。他方、本論文のモデルでは名目金利と期待インフレ率を統合的に評価できることを示し、期待インフレ率と名目金利の連動性を正確にモデル化することが重要であることを明らかにする。

#### **4 . 第 3 章 Regime Switching Term Structure Model under Partial Information**

第 3 章は、景気循環というレジームの転換を念頭に、投資家がこれを直接観測できず短期金利の推移から推測する部分情報の設定において、レジームの転換が金利のヒストリカル・ボラティリティーやリスク・プレミアムに与える影響を理論的・数値的に考察する。

Hamilton (1988) 以来、多くの実証研究によれば、金利の推移にも景気循環に関連したレジームの転換が見られ、レジーム・スイッチング・モデルが有用であることが報告されている。これらの結果を受けて、近年、金利の期間構造のモデルにも景気循環を想定したレジーム・スイッチを取り入れる研究が盛んである。

しかしながら、Dai, Singleton and Yang (2007) 等の金利の期間構造の研究では、計量経済学者は部分情報下にあるものの、投資家は完全情報を有して価格付けを行うことができるという仮定に基づいて分析を行っているものが多く、部分情報が金利の期間構造に与える影響についてはほとんど分析が行われていない。2 . で述べた通り、景気循環といったレジームの転換を想定する場合には投資家もこれを観測できず部分情報下にあるとの仮定に基づいた分析が妥当である。本章ではこの仮定の下で、レジームの転換が金利の期間構造に与える影響について、完全情報の場合と対比しながら分析を行う。

考察するモデルは、第 2 章の実証分析で用いたモデルの名目金利に関するものと同一で、短期金利の平均回帰水準がレジーム・シフトによって変化する 1 ファクターの OU 過程である。ただし、既存の研究とは異なり、投資家には、短期金利の水準だけが観測可能であり、レジーム・シフトする平均回帰水準については観察不可能であると仮定する。また、レジーム・シフトに係わるリスクの市場価格も考慮し、レジーム・シフトが観測できない部分情報下でそれがどのような影響をもたらすかについても分析を行う。

上記モデルが想定する状況を具体的に説明すると次の通りである。投資家は中央銀行による政策金利（短期金利）の変化を観測することができるが、投資家はもちろん中央銀行も、現在のレジームを直接把握することはできず、したがって現時点における政策金利の長期的な均衡水準についての情報は有していない。中央銀行は経済指標の丹念な分析からレジームの変化を調査しており、適切な金融政策が実施されることで、政策金利は長期的な均衡水準に徐々に近づいていく。投資家は政策金利の動きから現在のレジームについての判断を随時更新し、その推測結果を基に債券等の価格付けを行い、金利の期間構造が形成される。

まず分析の準備として、ノイズのある観測値から確率過程を推定するフィルタリング理論を用い、レジームの転換が既に発生しているという事後確率を実確率と同値マルチング

ール測度の下で算出する。これらの結果を用い、部分情報の下での割引債価格を導出し、これが完全情報下におけるレジームの転換前と後の割引債価格をレジーム転換の事後確率によって加重平均したものであることを示す。

完全情報下ではレジームの転換に伴って価格がジャンプするが、部分情報下ではレジームの転換が直接的には観測できないため、割引債の価格が平均化され、ジャンプせずに連続的な過程となる。その影響で、完全情報の下で定数であった割引債のボラティリティーが部分情報の下では確率的になることを示す。部分情報下の割引債のボラティリティーは、完全情報のボラティリティーと当初は同じ水準であるものの、現在のレジームについての事後確率に依存して確率的に変動し、事後確率が  $1/2$ 、すなわち、どちらのレジームであるか判断がつかない場合に大きくなる。そして、レジーム転換の事後確率が  $1$  となりレジームの転換が完全に把握できた場合には元の水準に戻る。言い換えれば、ボラティリティーの高い時期が継続するというボラティリティー・クラスタリングは情報の不確実性に応じて発生する。

ボラティリティーの期間構造は、完全情報の場合、短期が最も大きく、長期になるに従って下がる右下がりの形状となるが、数値計算によれば、部分情報下の場合、一旦上昇した後には低下するハンプの形状を再現できることも示す。

一方、部分情報下におけるリスクの市場価格も、レジームの転換が観測可能ではないため、完全情報下におけるレジーム・シフトの市場価格がディフュージョン・リスクの市場価格に転換されることを示す。それにより完全情報の下で定数であったディフュージョン・リスクの市場価格も部分情報下では確率的になる。

## **5 . 第 4 章 Option Pricing using Regime-Shift Model**

第 4 章は、レジームの転換が金利に関する派生商品の価格やその IV にどのような影響を与えるか分析するもので、完全情報および部分情報それぞれの場合について行う。

レジーム・スイッチング・モデルに関するこれまでの研究は主に、4 . で述べたとおり、金利のヒストリカルな統計分析が金利の期間構造に関する分析であり、金利に関する派生商品の価格付けを論じたものは少ない。Landen (2000) と Hansen and Poulsen (2000) が例外であるが、前者は完全情報における一般的な派生商品の価格付けには言及しないまま、これを前提として部分情報の下での一般的な派生商品の価格付けを論じたのみであり、後者は割引債に関するコール・オプション価格の計算方法について若干触れているのみである。

しかしながら、LIBOR に関するコール・オプションであるキャップや、スワップに関するオプションであるスワップションはプレーンバニラと呼ばれる基本的な派生商品であり、金利モデルの現実への適合度を検証する上ではこれらの分析は欠かすことができない。そ



のため本章では、キャップやスワップションの解析的な価格式を導出し、それら派生商品の IV の特徴について数値的な分析を行う。

考察するモデルは、第 2 章・第 3 章に続き、短期金利の平均回帰水準がレジーム・シフトによって変化する 1 ファクターの OU 過程である。

まず完全情報の場合に、割引債に関するヨーロピアン・コール・オプションの評価を行う。レジーム・シフト・モデルの場合、割引債価格は、仮想的な割引債価格を加重平均する形となっているため、既に一種の割引債のポートフォリオとなっている。そのため、割引債のポートフォリオに関するオプション価格を算出するための Jamshidian (1989) の分解を用いることになる。これにより、オプション価格も割引債価格の場合と同様に、レジームの転換時点で条件付けしたときの仮想的なオプション価格をレジームの転換時点の確率で加重平均したものとして解析的に評価できることを示す。

LIBOR に関するコール・オプションであるキャップやキャブレットについては、この割引債のオプションのポートフォリオとして求めることができる。

次にスワップションの評価を行う。スワップションの評価では通常のアフィン・モデルでも Jamshidian の分解を用いることになるが、本モデルでも同様に用い、割引債のオプションのポートフォリオとして求めることができることを示す。

部分情報下におけるオプション価格は、第 2 章の結果により割引債価格の場合と同様に、完全情報下におけるレジームの転換前と後のオプション価格をレジーム転換の事後確率によって加重平均したものとして求められる。

上記モデルについて数値計算を行い、IV の期間構造はハンブセズに右下がりとなるが、IV を行使価格に対してプロットしたものはスキューの形状を再現できることを示す。

## **6 . 第 5 章 The Instantaneous Volatility and the Implied Volatility Surface for a Generalized Black-Scholes Model**

第 5 章は、レジーム・シフト・モデルから離れ、Takaoka (2004) により提案された一般化 Black-Scholes (以下、一般化 BS) モデルについて、その瞬間的ボラティリティであるローカル・ボラティリティ (LV) と IV についてその特徴を分析する。

一般化 BS モデルは、レジームの転換を考慮したものではないが、レジーム・シフト・モデルと極めて近い性質を持っている。Black and Scholes (1973) モデルにおける株価は定数ボラティリティの幾何ブラウン運動として表現されるが、一般化 BS モデルの株価は、個々の投資家が異なるボラティリティを予想しており、その異なるボラティリティの幾何ブラウン運動を個々の投資家の富の分布によって加重平均したものとして表現される。したがって、その瞬間的ボラティリティは時刻  $t$  とその時の株価の決定論的関数で表現す

ることができ、LV モデルに分類される。他方、レジーム・シフト・モデルでの割引債価格はレジームの転換時点で条件付けしたときの仮想的な割引債価格をレジームの転換時点の確率で加重平均したものである。すなわち、元になる仮想的な資産価格をある確率で加重平均するという点で両者のアプローチは一致をみる。これにより、両者のオプション価格は共に Jamshidian 分解を用いた仮想的なオプション価格の加重平均になることが示され、したがって IV の特徴も極めて近いと考えられる。

一方、一般化 BS モデルはレジーム・シフト・モデルと比較して LV の構造が単純である。レジーム・シフト・モデルは完全情報の場合には価格のジャンプがあり、部分情報の場合には複雑な確率的ボラティリティーとなることから、LV の特徴を考察することは難しい。これに対して、一般化 BS モデルの LV は各投資家のボラティリティーを単に加重平均したものであり、その性質を詳しく調べることができる。

IV は LV のある種の平均であるため、一般化 BS モデルでは LV の分析を通して IV の性質を分析することが可能である。したがって、本章ではレジーム・シフト・モデルの IV の性質を知る上での重要な参考として、一般化 BS モデルについての分析を行う。

まず、一般化 BS モデルおよびその LV やコール・オプションの価格式についてレビューを行う。そのうえで、LV の特徴について理論的に分析を行う。IV の分析結果と比較するために、LV におけるマネーネスを、割り引かれた株価を初期株価で割ってものとして定義し、これに対して LV をプロットすると右下がりの曲線で下に凸となることを示す。

次に、コール・オプションの IV の特徴について分析を行い、割り引かれた行使価格を初期株価で割って定義される通常のマネーネスに対して描かれる IV 曲線も同様に右下がりとなることを理論的に示す。最後に数値計算を行い、IV 曲線においても下に凸であり、実際の市場で観察されるようなスキューを表現できることを数値的に示す。

## **7. 結論と課題**

最後に、本論文で行った分析を総括した上で、その含意を論じるとともに、本論文で扱うことができなかった課題について言及する。

本論文では、レジームの転換が一度だけ発生する金利の期間構造モデルを構築し、実質金利の期間構造や部分情報の下での分析に拡張を行い、レジームの転換が金利の期間構造に与える影響について考察を行った。実質金利の期間構造の推定では、CPI が継続的にゼロ以上となるまでゼロ金利政策が継続されるという関連性を、名目金利と期待インフレ率のレジームが同時に転換するという形でモデルへの確に織り込むことが重要であることが示された。部分情報の下での分析では、金融政策に代表される完全情報の場合と景気循環に代表される部分情報の場合とでは、金利のヒストリカル・ボラティリティー、リスク・

プレミアムに顕著な違いが生じ、部分情報における情報の不確実性に依りてボラティリティー・クラスタリングが発生することを示した。オプション価格やインプライド・ボラティリティーの分析からは、レジームの転換が、原資産である債券市場のヒストリカル・ボラティリティーとオプション市場のインプライド・ボラティリティーに異なる影響を与えていることが明らかとなった。

これらの議論を総括すれば、レジームの転換が金利の期間構造に与える影響はその発生条件や情報構造により大きく異なる可言え、レジームの転換をモデル化する際はそれが生じる経済的背景を的確に反映することが極めて重要であることが、その含意として得られる。

今後残された課題としては、以下の点が挙げられる。

第 2 章では実質金利の期間構造について分析を行った。本論文のモデルは、レジーム・シフト確率を時間の関数として与えるものの決定論的関数であらわされるため、一度その期間構造を外生的に与えた後は単調に変化する構造となっている。そのため、現実の市場で観測されるようなレジーム・シフト確率の期間構造が時々刻々と変化する状況を内生的に表現することができない。言いかえれば、ある一時点の市場環境にキャリブレーションすることは可能であるが、一定期間の市場環境について時系列的に一貫した分析を行うことは難しい。この観点からは、レジーム・シフト確率のハザード・レートを確認過程として定式化することが一つの解決策として考えられる。

第 3 章では部分情報の下での分析を行ったが、解析解が得られるようレジームの転換が一度だけ発生するとの仮定を置いた。現実的な状況を考えても、ある一時点の金利の期間構造を考える際、投資家が想定し得るレジームの転換は次の 1 回が多くてもその次までの 2 回程度であると思われるが、長期的な分析を行う際には、景気循環のようにレジームの転換が幾度も起こってレジームが循環するような状況の方がより現実的な想定である可言える。この状況を分析するには、本論文のモデルを二つあるいはそれ以上のレジームを行き来するレジーム・スイッチング・モデルに拡張することが必要となる。

第 4 章ではキャップやスワップション等の派生商品の価格およびその IV について分析を行ったが、多角的な観点からの評価は行えていない。本モデルが、現実の市場データにどれくらい適合するのか、また日々の市場の変動に対してパラメータは安定的であるのかどうかなど、今後の検証が必要である。

第 5 章では一般化 BS モデルについてその LV と IV について分析を行ったが、IV の結果の一部については LV の結果からの推測にとどまっている。これらの推測を証明することも残された課題である。

以上