平成 23 年度（2011 年度）
博士学位請求論文要旨

Some Financial Applications of Backward Stochastic Differential Equations with jump – Utility, Investment and Pricing –

一橋大学大学院　国際企業戦略研究科
金融戦略・経営財務コース
柏原　聡

1　本論文の構成

本論文の構成は以下のとおりである．

第 1 章 Introduction
- 1.1 Motivation for this study
- 1.2 Abstract and focus for each chapter

第 2 章 Stochastic Differential Utility whose states are driven by jump diffusion process
- 2.1 Introduction
- 2.2 Problem formulation
  - 2.2.1 Backward stochastic differential equations with jumps
  - 2.2.2 The utility process
  - 2.2.3 The wealth process
  - 2.2.4 Problem formulation of the maximization of recursive utility
- 2.3 Backward formulation of the maximization problem
- 2.4 Maximum principle
- 2.5 Forward-Backward system
- 2.6 Normalized SDU
- 2.7 Summary and conclusions

第 3 章 Dynamic Investment Strategies to Reaction-Diffusion Systems Based upon Stochastic Differential Utilities
- 3.1 Introduction
- 3.2 Maximum Principle in the Model with Stochastic Differential Utility
  - 3.2.1 Optimal investment in regime-shifting assets
  - 3.2.2 Non-synchronous regime shift model

3.3 Numerical computation
3.3.1 Nested PDE system of synchronous regime shift model
3.3.2 Nested PDE system of non-synchronous regime shift model
3.4 Summary and Concluding Remarks
第 4 章 A BSDE Approach to Utility Indifference Pricing and Reserving
4.1 Introduction
4.2 Problem formulation
4.2.1 Notation
4.2.2 The financial market and the wealth process
4.2.3 Utility indifference pricing and reserving
4.2.4 Literature review
4.3 Case of Brownian motion
4.4 Case of Poisson jump
4.5 Numerical computation
4.6 Conclusion and Remarks
第 5 章 Conclusion
付録 Proofs
A.1 Proof of Theorem 2.2.2
A.2 Proof of Proposition 2.4.1
A.3 Proof of Theorem 2.4.2
A.4 Proof of Theorem 2.4.3

2　本論文の目的

本論文のテーマは, 状態変数がジャンプ拡散過程によって駆動される非完備市場において, 後向確率微分方程式 (Backward Stochastic Differential Equations; BSDEs) を, 数理ファイナンスにおいて重要な役割を担っている効用最大化問題について応用することにある. 後向確率微分方程式は様々な応用分野を持つことが知られているが, ここで我々は, 確率微分効用（Stochastic Differential Utility; SDU）と効用無差別価格 (Utility Indifference Pricing) について取り上げ議論を行った.

まず初めに, ジャンプ付確率微分効用を最大化するポートフォリオおよび消費の最適化問題に焦点を当てる. 金融経済学の伝統的な資産価格モデルでは, 経済主体の選好は時間加法的な von Neumann- Morgenstern 型の効用に従うとの仮定の下で構成されている. しかしながらそのようなモデルは, 互いに関連した 2 つの理由から, 多くの批判にさらされてきた. 一つは, 実際の市場への当てはまりの悪さである. Mehra and Prescott (1985) [40] の危険資産プレミアムパズル (equity premium puzzle) は最も有名な反例の一つである. 二点目は, このタイプの効用関数が, 本来概念的に異なっている, 異時点間の代替性とリスク回避度を区別していないことにある. これらの欠点を克服するために, Epstein and Zin (1989) [14] は, 伝統的に用いられている時間加法的な期待効用関数を一般化し, 離散時間において, 異時点間で再帰的に定義される効用関数について研究した. Epstein and Zin の続く論文 [15] では, この再帰的効用関数が実際の観測データに対するモデルの適合度を改善することが示されている. Duffie and Epstein (1992) [10] は, Epstein and Zin の再帰的効用関数を連続時間に拡張して

確率微分効用を開発した. これらの効用関数では, 異時点間の代替性とリスク回避度を分離して考えることが可能になった. すなわち, 通常の静的な効用では考慮することのできない不確実性が解消するタイミングに関する選好をモデル化することができるようになったわけである. Duffie and Epstein の次の論文 [11] では, Duffie and Skiadas (1994) [13] の効用勾配アプローチを使用することにより, ブラウン運動によって生成された情報系において, 正規化された確率微分効用における状態価格密度過程が明示された. El Karoui, Peng, and Quenez [16, 17] は, 後向確率微分方程式を適用することにより確率微分効用の最大化問題が解けることを示した.

本論文では第 2 章において El Karoui, Peng, and Quenez [17] の結果を, いわゆるレジーム・シフトモデルを含む, 状態変数がジャンプ拡散過程によって駆動される非完備市場に拡張した. この問題を解くために, ここでは一階の条件を導き, 導かれた条件が必要十分条件であることを示した. 最適富過程および最適効用過程は, forward-backward system の解として導かれる.

次に, 本論文では反応拡散系を取り上げる. 金融業界で近年注目されているレジームが転換する現象（ドリフト項と拡散項が同期する場合および同期しない場合の両方のケースについて）は, たとえば, 金融市場における急激な資産価格の変化をもたらす経済環境の構造的変化や, 保険契約者への支払条件となっているような予期せざる被保険者の健康状態の変化などが挙げられるように, 現実の様々な局面において観測されている. 近年, Becherer and Schweizer (2005) [3] は, 生物学的なパターン形成や化学反応などで現れることが知られている反応拡散系を用いることにより, この種のレジームが転換する現象をモデル化した. 彼らのモデルでは, 整数値をもつポアソンジャンプを導入することにより, レジームの転換を簡潔に記述している.

本論文では第 3 章において, 第 2 章で求められた結果を応用して, 資産価格が反応拡散系に従う場合について, 確率微分効用に基づく最適な投資戦略について研究した. 本研究は, 反応拡散系がレジームが転換する現象に関する研究にスポットを当て, 潜在的に多くの種類の状態変数の動態をモデル化できることを示すものである. 更に, この最適化問題を解く際に付随して導かれる入れ子状準線形偏微分方程式について, 数値解法を提示する. この数値解法を用いることにより, 具体的な最適ポートフォリオおよび最適消費を求めることができる.

次に, 本論文では効用無差別価格について研究を行った. 金融機関にとって動的なリスクの評価は本源的な課題である. 金融市場が完備である場合, 条件付請求権の価格は複製ポートフォリオを構成することにより一意に定まる. しかしながら, 複製ポートフォリオを構成することが出来ない非完備市場においては, 無裁定条件と整合的な無数の価格と, それに対応する無数のマルチンゲール測度が存在する. また, そもそも金融機関の資産/負債査定や（部分）ヘッジ戦略は, 金融機関自身のリスクに対する評価や選好を考慮に入れるべき事柄であると考えられる. そこで, 金融機関が効用を最大化しつつ, 請求権を購入しプレミアムを支払った後の期待効用（もしくは請求権を売却しプレミアムを受領した後の期待効用）と, 購入前（もしくは売却前）の期待効用が変わらないように定めたプレミアムを考える. この概念は Hodges and Neuberger (1989) [22] によってファイナンスの問題へ導入されているが, 古くから等価効用原理としてアクチュアリーに知られている.

保険契約の価格付けや負債（責任準備金）評価はアクチュアリーにとって重要な問題である. Gerber (1976) [19] はこの保険料算出原理を, 効用無差別負債と呼ばれる負債評価に拡張した. 本論文では, 後向確率微分方程式を応用することにより, 市場で取引されていないリスクを含む条件付請求権の効用無差別価格および効用無差別負債を求めた. 後向確率微分方程式を使用したアプローチは, Rouge and El Karoui (2000) [47] が価値関数と最適ポートフォリオを求めるために導入した. 彼らは双対価値関数を後向確率微分方程式として定式化し, 取引制約がある状況における最適ポートフォリオを導いた. より直接的に, Müller *et al.* (2005) [24] や Lim [30, 31] は価値関数自身を後向確率微分方程式として提示している.

本論文では第 4 章において, 価値関数を後向確率微分方程式で表現する方法を新たに提示する. この方法はいくつかの取り扱いやすい性質を持っており, 取引されていないリスクがブラウン運動に従う場合に加え, ジャ

ンプ拡散過程に従う場合についても同じフレームワークで議論を行うことが出来る. 更に, Malliavin 微分を適用することにより, 具体的な数値計算例を提示する.

以下, 本論文の主要な結果について各章ごとに述べていく.

3 第 2 章 Stochastic Differential Utility whose states are driven by jump diffusion process

この章では状態価格がジャンプ拡散過程によって駆動される非完備市場における確率微分効用の最大化問題を取り扱う. ここでは危険試算のドリフト項と拡散項が, 有限なジャンプサイズ分布を持つ複合ポアソン過程に従うと仮定する. この設定は, いわゆるレジーム・シフトモデルを内包している. 本研究ではまず, ジャンプ拡散過程で駆動される後向確率微分方程式の比較定理を導いた. その準備として, ジャンプ付線形後向確率微分方程式の随伴過程が一意に存在することを証明した. なお, この比較定理の証明は, Situ (2005) [51] とは別の方法を用いた。次に, 最適性の一階の条件を導き, 比較定理を用いることにより状態価格密度過程を求めた. 最適富過程および最適効用過程はここで導かれた forward-backward system の解として得られる. 最後に, ジャンプ付確率微分効用の aggregator の正規化について考察し, 新たに 4 つの正規化された aggregator を提示した.

4 第 3 章 Dynamic Investment Strategies to Reaction-Diffusion Systems Based upon Stochastic Differential Utilities

この章では連続時間における確率微分効用に基づく動的投資戦略について研究した. ここでは, 資産過程が相互作用する伊藤=ポアソン過程 — いわゆる反応拡散系 — に従うと仮定する. 本研究では, ジャンプ付後向確率微分方程式で記述される確率制御問題の確率的最大値原理を求め, 最適投資戦略と最適投資を導いた. 次に, この問題を解く際に付随して導かれる入れ子状準線形偏微分方程式について数値解法を提案し, 具体的な計算結果を提示した.

5 第 4 章 A BSDE Approach to Utility Indifference Pricing and Reserving

この章では非完備市場における価格決定問題および資産/負債評価問題に対する効用無差別アプローチをテーマにした. なお, この章では時間加法的な効用を仮定している. 市場で取引されていないリスクを含む条件付請求権の効用無差別価格および効用無差別負債を評価するために, ここでは新たな後向確率微分方程式によるアプローチを提案した. 本研究では, まず, 価値関数の線形後向確率微分方程式表現を導いた. 線形後向確率微分方程式の性質から, 価値関数は前向確率過程の期待値として定式化される. またここでは, 効用無差別価格は, 最小マルチンゲール測度の下での期待値と確実性等価に分解された表現の形で得られた. さらに, 取引されていないリスクがブラウン運動に従う場合に加え, ジャンプ拡散過程に従う場合についても考察した. 最後に, Malliavin 微分を適用することにより, 具体的な数値例を提示する.

6 結論と課題

最後に, 本論文で行った議論を総括した上でその含意を論じるとともに, 本論文で扱うことができなかった課題について言及する.

第 2 章では, 状態価格がジャンプ拡散過程によって駆動される確率微分効用の最大化問題を論じた. 最適性の一階の条件を導き, それが必要十分条件になっていることを示した. 更に, 最適富過程および最適効用過程, およびそれらに付随するデフレーターが, forward-backward system の一意解であることが証明された. すなわち, ジャンプ付確率微分効用を応用するための理論的フレームワークを整えることができたといえる. これらの結果は容易に多次元ジャンプの場合に拡張でき, さらにドリフト項と拡散項がそれぞれ同期しないジャンプ拡散過程に従う場合も同様である. 同期しない事例は第 3 章において論じられる. また, ジャンプ付確率微分効用の正規化された aggregator について, 新たに 4 つの型を提案した. これらの新しい aggregator についての性質を分析する研究は興味深い応用分野である.

第 3 章では, 確率微分効用における反応拡散系の最適化問題を研究した. ここでは, 第 2 章と同様のアプローチをとり, 確率的最大値原理を適用することにより最適化問題を解いた. 数値解析では, ポアソンジャンプ項が付いた入れ子状偏微分方程式を, 不動点アルゴリズムを用いることによって計算した. この手法は, 拡散過程に基づく FBSDE の four-step scheme [35] を, ポアソンジャンプ項を包含するように, 直接的に拡張したものである.

残された課題として, 以下のことが挙げられる. まず始めに挙げられるのは, この章で取り上げたのは主に Kreps-Porteus 型の aggregator を基にした数値特性であることである. 他のタイプの aggregator の場合の最適解について探求することは興味深いテーマである. 次に挙げられるのは, 制約条件である. 投資期間中の富過程や取引戦略に制約を課した場合にどのような結果になるのだろうか. このテーマは El Karoui, Kapoudjian, Pardoux, Peng, and Quenez (1997) [18] が示したように, reflected BSDE 理論を応用することによって解ける可能性がある. Cvitaníc, Karatzas, and Soner (1998) [9] も制約下の取引戦略について研究している. 彼らのアイディアは, 本論文の確率微分効用の最大化問題に応用できるのではないかと考えられる. 更に, Becherer and Schweizer (2005) [3] で言及されているとおり, 反応拡散系はデフォルトリスクや離散状態で変化するクレジットクオリティを記述することができる. 信用格付けが遷移する複数レジームモデルにおいて, 確率微分効用の基でデフォルタブルな資産への投資戦略について研究することも興味深い.

第 4 章では, 市場において取引されていないブラウン運動やポアソンジャンプに従うリスクを含む条件付請求権に対する, 効用無差別価格および効用無差別負債について研究した. ここでは, 後向確率微分方程式を使用したアプローチを新たに提案し, 条件付請求権の効用無差別価格の計算を行った. その結果, 確実性等価を用いた効用無差別価格式を導出することが出来た. また, 線形後向確率微分方程式の随伴過程の性質により, 価値関数が前向確率過程の期待値として表現された. 更に, Malliavin 微分を用いることにより数値計算例を提示した.

ここで残された課題として, 以下の三点があげられる. まず第一点目は, ここで得られた結論が, 経済主体が指数効用関数に従っているという仮定を前提としていることである. もし, $y_0^0 \geq y_0$ を証明することができれば, これらの結論を一般化することができる. 次に第二点目として, 本研究で求めた価値関数では富に関する制約が考慮されていないことである. 期中の富過程や取引戦略に制約を架した場合について考察することは興味深い. 第三点目は, 取引できないリスクの変動により, 経済主体自身の破綻の可能性が考慮されていないことである. 実際, 取引できないリスクを引き受けている金融機関はヘッジ手段が無いため, 常に破綻のリスクにさらされている. リスクの引き受け手の破綻の可能性を考慮した効用無差別価格がどのように変化するのか, またどのような示唆を与えるのか研究することは非常に興味深い課題である.

以　上

参考文献

[1] Applebaum, D.: *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, 2004, Cambridge studies in advanced mathematics.

[2] Barles, G., R. Buckdahn and E. Pardoux: *BSDEs and Integral-Partial Differential Equations*, 1997, Stochastics, **60**, 57-83.

[3] Becherer, D. and M. Schweizer: *Classical Solutions to Reaction-Diffusion Systems for Hedging Problems with Interacting Itô and Point Processes*, 2005, The Annals of Applied Probability, **15**, 1111-1144

[4] Bielecki, T. R., M. Jeanblanc, and M. Rutkowski: *Indifference Pricing and Hedging of Defaultable Claims,* 2004, Paris-Princeton Lectures on Mathematical Finance 2004

[5] Bielecki, T., M. Jeanblanc and M. Rutkowski: *PDE Approach to Valuation and Hedging of Credit Derivatives*, 2005, Quantitative Finance, **5**, 257-270.

[6] Bismut, J. M., *Conjugate Convex Functions in Optimal Stochastic Control*, 1973, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **44**, 384-404.

[7] Cvitanić, J., and I. Karatzas: *Hedging Contingent Claims with Constrained Portfolios,* 1993, The Annals of Applied Probability, Vol. 3, No. 3, 652-681.

[8] Cvitanić, J., and I. Karatzas: *Backward Stochastic Differential Equations with Constraints on the Gain-Process*, 1998, The Annals of Probability, Vol. 26, No. 4, 1522-1551.

[9] Cvitaníc, J., I. Karatzas and H. Soner: *Backward Stochastic Differential Equations with Constraints on the Gains-Process*, 1998, The Annals of Probability, **26**, 1522-1551.

[10] Duffie, D., and L. G. Epstein: *Stochastic Differential Utility*, 1992, Econometrica, 60, 353–394.

[11] Duffie, D., and L. G. Epstein: *Asset Pricing with Stochastic Differential Utility*, 1992, The Review of Financial Studies, 5, 411–436.

[12] Duffie, D., and P. Lions: *PDE Solutions of Stochastic Differential Utility*, 1992, Journal of Mathematical Economics, 21, 577–606.

[13] Duffie, D., and C. Skiadas: *Continuous-time Security Pricing: A Utility Gradient Approach*, 1994, Journal of Mathematical Economics, 23, 107–131.

[14] Epstein, L., and S. Zin: *Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns; A Theoretical Framework*, 1989, Econometrica, 57, 937–969.

[15] Epstein, L., and S. Zin: *Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: An Empirical Analysis*, 1991, Journal of Political Economy, 99, 2, 263–286.

[16] El Karoui, N., S. Peng, and M. C. Quenez: *Backward Stochastic Differential Equations in Finance*, 1997, Mathematical Finance, 7, 1, 1–71.

[17] El Karoui, N., S. Peng, and M. C. Quenez: *A Dynamic Maximum Principle for the Optimization of Recursive Utilities under Constraints*, 2001, The Annals of Applied Probability, 11, 664–693.

[18] El Karoui, N., C. Kapoudjian, E. Pardoux, S. Peng and M. C. Quenez: *Reflected Solutions of Backward SDE's and Related Obstacle Problems for PDE's*, 1997, *Annals of Probability*, **25**, 702-737.

[19] Gerber, H. U.: *A Probabilistic Model for (Life) Contingencies and a Delta-Free Approach to Contingency Reserves*, 1976, Transactions of the Society of Actuaries, Vol. 28, 127-148.

[20] Gerber, H. U., and G. Pafumi: *Utility Functions: From Risk Theory to Finance,* 1998, North American

Actuarial Journal, Vol. 2, No. 3, 74-100.

[21] Henderson, V., and D. Hobson: *Utility Indifference Pricing – An Overview,* August, 2004, Volume on Indifference Pricing, Princeton University Press.

[22] Hodges, S., and A. Neuberger: *Optimal Replication of Contingent Claims Under Transaction Costs,* 1989, Review of Futures Markets, Vol. 8, 222-239.

[23] Hou, C., and I. Karatzas: *Least-Squares Approximation of Random Variables by Stochastic Integrals,* November 19, 2003, Working paper.

[24] Hu Y., P. Imkeller, and M. Müller: *Utility maximization in incomplete markets,* 2005, The Annals of Applied Probability, Vol. 25, No. 3, 1691-1712.

[25] Karatzas, I., and D. Ocone: *A Generalized Clark Representation Formula, with Application to Optimal Portfolios*, 1991, Stochastics and Stochastics Reports, Vol. 34, 187–220.

[26] Kobylanski, M.: *Backward Stochastic Differential Equations and Partial Differential Equations with Quadratic Growth,* 2000, The Annals of Probability, Vol. 28, No. 2, 558-602.

[27] Kreps, D. and E. Porteus: *Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory*, 1978, Econometrica, 46, 185-200.

[28] Kusuda, K.: *Consumption-based CAPM and Option Pricing under Jump-diffusion Uncertainty*, 2003, Discussion Paper 317, Center for Economic Research, Department of Economics, University of Minnesota.

[29] Lazrak, A., and F. Zapatero: *Efficient Consumption Set under Recursive Utility and Unknown Beliefs*, 2003, Journal of Mathematical Economics, forthcoming.

[30] Lim, A. E. B.: *Quadratic Hedging and Mean-Variance Portfolio Selection with Random Parameters in an Incomplete Market,* 2004, Mathematics of Operations Research, Vol. 29, 132-161.

[31] Lim, A. E. B.: *Mean-Variance Hedging When There are Jumps,* 2005, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 44, No. 5, 1893-1922.

[32] Løkka, A.: *Martingale Representation, Chaos Expansion and Clark-Ocone Formulas*, 1999, MPS-RR 1999-22, MaPhySto.

[33] Løkka, A.: *Martingale Representation of Functionals of Lévy Processes*, 2004, Stochastic Analysis and Applications, Vol. 22, No. 4, 867–892.

[34] Luenberger, D.: *Optimization by Vector Space Methods*, 1969, John Wiley.

[35] Ma, J., P. Protter, and J. Yong: *Solving Forward-backward Stochastic Differential Equations Explicitly – A Four Step Scheme*, 1994, Probability Theory and Related Fields, 98, 339–359.

[36] Ma, J., P. Protter, J. San Martín, and S. Torres: *Numerical Method for Backward Stochastic Differential Equations*, 2002, Annals of Applied Probability, **12**, 302-316.

[37] Ma, J. and J. Yong: *Forward-Backward Stochastic Differential Equations and Their Applications*, 1999, Lecture Notes in Mathematics, 1702, Springer.

[38] Malliavin, P.: *Stochastic Analysis*, 1997, Springer-Verlag, New York.

[39] Mas-Colell, A.: *The Recoverability of Consumers' Preferences from Market Demand Behavior*, 1977, Econometrica, 45, 6, 1409–1430.

[40] Mehra, R., and E. C. Prescott: *The Equity Premium: A Puzzle*, 1985, Journal of Monetary Economics, 15, 145–161.

[41] Nakamura, N.: *Numerical Approach to Asset Pricing Models with Stochastic Differential Utility*, 2004, Asia-

Pacific Financial Markets, **11**, 267-300.

[42] Nualart, D.: *The Malliavin calculus and related topics*, 1995, Springer-Verlag, Berlin.

[43] Nualart, D., and J. Vives: *Anticipative Calculus for the Poisson Process Based on the Fock Space*, 1990, in: Séminare de Probabilitiés XXIV, in: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1426, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[44] Øksendal, B.: *An Introduction to Malliavin Calculus with Applications to Economics*, 1997, Working Paper No. 3, at the Norwegian School of Economics and Business Administration, Bergen, Norway.

[45] Pardoux, E., and S. G. Peng: *Adapted Solution of a Backward Stochastic Differential Equation*, 1990, System & Control Letters, 14, 55–61.

[46] Pardoux, E., F. Pradeilles and Z. Rao: *Probabilistic Interpretation of A System of Semi-Linear Parabolic Partial Differential Equations*, 1997, Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics, **33**, 467-490.

[47] Rouge, R., and N. El Karoui: *Pricing via Utility Maximization and Entropy,* 2000, Mathematical Finance, Vol. 10, No. 2, 259-276.

[48] Schroder, M., and C. Skiadas: *Optimal Consumption and Portfolio Selection with Stochastic Differential Utility*, 1999, Working Paper No.226.

[49] Shouda, T: *The Indifference Price of Defaultable Bonds with Unpredictable Recovery and their Risk Premiums*, 2005, Graduate School of International Corporate Strategy, Hitotsubashi University, Working paper.

[50] Situ, R.: *On Solutions of Backward Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications*, 1997, Stochastic Processes and their Applications, 66, 209–236.

[51] Situ, R.: *Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications*, 2005, Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering, Springer.

[52] Tang, S., and X. Li: *Necessary Conditions for Optimal Control of Stochastic Systems with Random Jumps*, 1994, SIAM Journal of Control and Optimization, 32, 5, 1447–1475.

[53] Yong, J. and X. Y. Zhou: *Stochastic Controls:Hamiltonian Systems and HJB Equations*, 1999, Springer-Verlag, New York.

[54] Young, V. R.: *Equity-Indexed Life Insurance: Pricing and Reserving using the Principle of Equivalent Utility,* 2003, North American Actuarial Journal, Vol. 17, No. 1, 68-86.