

# 博士学位請求論文要旨

## 金融リスク依存関係の定量化手法の改良とその応用

一橋大学大学院 経営管理研究科  
金融戦略・経営財務プログラム

BD19F001

監物 輝夫

### 1 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。

#### 第1章 序論

- 1.1 研究の目的・背景
- 1.2 各章の目的と概要

#### 第2章 CoVaR によるシステミック・リスク計測

- 2.1 はじめに
- 2.2 CoVaR 及び  $\mathcal{D}$ -CoVaR の定義と特徴
- 2.3 CoVaR 及び  $\mathcal{D}$ -CoVaR の大きさに基づくリスク水準の分類
- 2.4 動的なモデルによる CoVaR 計測
- 2.5 CoVaR 及び  $\mathcal{D}$ -CoVaR の3モデル間の比較分析
- 2.6 まとめ

#### 第3章 多次元 Hawkes 過程を用いた倒産リスク伝播構造の推定

- 3.1 はじめに
- 3.2 分析データについて

- 3.3 多次元 Hawkes 過程による倒産発生モデル
- 3.4 多次元 Hawkes 過程のカーネル関数の特徴づけと推定法
- 3.5 分析結果
- 3.6 まとめ

#### 第4章 拡張 Hawkes 過程を用いた倒産リスク伝播構造の推定とストレステストへの応用

- 4.1 はじめに
- 4.2 分析データについて
- 4.3 拡張 Hawkes 過程による倒産発生モデル
- 4.4 拡張 Hawkes 過程のカーネル関数の特徴づけと推定法
- 4.5 分析結果
- 4.6 まとめ

#### 第5章 結論

## 2 本研究の目的

本稿では金融機関におけるリスク管理で重要な概念となっている依存関係について論じている。金融機関におけるリスク管理においては主に3つのリスクに分類することができ信用リスク、市場リスク及びオペレーショナル・リスクがある。この内、特に銀行においては信用リスクが大きなエクスポージャーとなっており、次いで市場リスクとなっている。本稿では主に銀行におけるリスク管理を想定しているが、銀行におけるリスク管理を考える際には BIS による自己資本比率規制が密接に関わってくる。

自己資本比率規制の第一の柱において信用リスク・アセットの算出に必要な所要自己資本の計算式には相関係数が用いられており、また自己資本比率規制の第二の柱で求められている内部管理でのリスク管理において、例えば資本配分で用いる経済資本の算出においても相関係数が使用されているなど、相関係数を用いてリスク管理を行う場面は多い。本稿ではこのような相関係数をリスク管理上取り扱っていくにあたって3つの課題を認識し、相関係数よりも広い概念である依存関係に対する定量化を試み、既存研究を踏まえて改善を図っている。

まずは相関係数は線形な相関関係を表す指標であるということである。例えば Embrechts et al. [5] では、変数  $X$ 、 $Y$  の相関係数  $\rho(X, Y)$  について非線形な(狭義)単調増

加関数  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  で、

$$\rho(T(X), T(Y)) \neq \rho(X, Y) \quad (2.1)$$

となる例が示されている。すなわち相関係数は周辺分布の変換に対して不変ではないということである。例えば戸坂・吉羽 [13] の例では確率変数  $Z$  に対して  $Y = \exp(5Z)$  と  $X = \exp(Z)$  を考えており、両者は非線形な関係ながらも強い依存関係があるが相関係数は 0.0004 となり依存関係はほとんどないという結果になる。そのため、こうした問題を回避した依存関係を示す指標として順位相関係数があり、順位相関係数はコピュラで表現できる。コピュラは多変量同時分布を周辺分布と依存構造に分離した際の依存構造に関する関数であり、Sklar の定理によりその存在が証明されている。

次の課題事項について、時点に対して静的になっている点である。すなわち、パラメータが全ての時点で固定されている点である。例えばリーマン・ブラザーズの破綻時といったリスクが顕在化した時期には依存関係が強まる傾向があるなど、動的に捉えなければリスクが顕在化した場合に過小評価をする恐れがある。こうした課題に対して例えば Patton [11] ではコピュラのパラメータを ARMA(1,10) 型でモデル化した上で時間変化させる Time-Varying Parameter コピュラモデルを提案している。

最後に、波及効果に関する表現である。たとえ上記のようにパラメータを時間変化させたとしても、あくまでもその時点の依存関係を捉えているにすぎず、過去の影響が将来に与えるといった効果までは捉えることができないため、コピュラとは異なる概念での分析が求められる。波及効果を表現する確率過程として Hawkes 過程が知られており、(単一あるいは複数のタイプの) イベントの累積発生件数をカウントする確率過程でイベント発生確率を特徴づける「強度過程」に自己励起性(あるイベント発生によって同タイプの強度がジャンプする)や相互励起性(あるイベント発生によって別のタイプの強度がジャンプする)といった性質を持っていることが特徴である。Hawkes 過程は、Hawkes [9] が集団間の伝染病の伝染メカニズムのモデル化などの応用を念頭において提唱したとされている。ファイナンス関連という点では、Hawkes 過程を信用リスク計量に応用した先行研究の一つとして Errais et al. [6] が挙げられる。同論文では、信用ポートフォリオ内のデフォルトイベント伝播を対象にして、Hawkes 過程やその拡張として拡散項を含むジャンプ・アフィン強度過程に基づくモデルに対する実証分析を行っている。最近では株式や先物市場での取引や価格変化をイベントとして、高頻度取引データの適用を意図した Hawkes 過程の取引モデルへの応用が増えてきている (Bacry et al. [3] を参照のこと)。

このような課題認識に基づき、本稿の第二章から第四章では、これら 3 つの課題点に対する研究を行った。課題に解決にあたっては銀行のリスク管理における 2 大リスクである

市場リスク及び信用リスクの観点から分析を行っている。

本稿の第 2 章では、3 つの課題のうち 1 点目と 2 点目である相関係数の取り扱いに関する問題とパラメータの時間変化に関して動的なモデルを用いてシステムミック・リスクを通じて分析を行っている。本分析ではシステムミック・リスク計測の定量的指標として CoVaR 及び  $\mathcal{D}$ -CoVaR に着目し、2007~2008 年での金融危機時におけるシステムミック・リスク顕在化前後における依存構造の変化について、これまでに研究されてきた DCC-GARCH モデル及び Time-Varying Parameter コピュラモデルに加えて、確率的コピュラを用いてリスク評価を行っている。

パラメータを動的にすることで各時点での依存関係の動きが評価でき、クレジットサイクルでの強弱をリスク管理上反映できる。しかしパラメータを動的にしても、例えばある企業の倒産をきっかけに連鎖倒産するといったケースまでは表現できず、ある時点の情報が次以降の時点の情報に影響を与えるモデルが必要となる。

こうした課題を踏まえて本稿の第 3 章と第 4 章では、3 点目の課題点である波及効果について、多次元 Hawkes 過程を用いて分析を行っている。まず第 3 章では多次元 Hawkes 過程を従来から多く用いられている指数減衰型カーネル関数によるモデルと Embrechts and Kirchner [4] による最小二乗法を用いた INAR モデルにより比較を行い、倒産件数のモデル化に対して応用可能性があることを確認している。比較においては実績値と推計値による誤差評価のほか、Hawkes グラフと呼ばれる依存構造をグラフ化することで波及経路の視覚化を行っている。

また、金融機関のリスク管理ではストレステストを用いた分析が主流となっており、一定の経済シナリオを仮定し、その下での損失を見積もることを行っている。第 4 章ではこうしたストレステストに対する応用も行い、シナリオを仮定して倒産件数がどのように推移するかについて比較を行った上でモデルの評価を行っている。

### 3 CoVaR によるシステムミック・リスク計測

第 2 章は、サブプライムローン問題を発端とする 2007~2008 年での金融危機において顕在化したシステムミック・リスクについて分析を行っている。システムミック・リスクの計測手法については様々な方法が提案されているが、本章では Adrian and Brunnermeier [1] によって提案された “CoVaR” 及び “ $\mathcal{D}$ -CoVaR”<sup>\*1</sup> を元に計測を行っている。

第 2 章では今までの研究における課題を踏まえ、以下の点に関して分析を行っている。

1. CoVaR 及び  $\mathcal{D}$ -CoVaR についての性質や特徴についての整理し、CoVaR と

---

<sup>\*1</sup> Adrian and Brunnermeier [1] では  $\Delta$ CoVaR と表記しているが、当研究では時系列モデルを扱い、 $\Delta$  の解釈に相違が生じるおそれがあることから、 $\mathcal{D}$ -CoVaR として表記する。

$\mathcal{D}$ -CoVaR の相関係数  $\rho$  に対しする変化についての分析。

2. CoVaR 及び  $\mathcal{D}$ -CoVaR の水準に基づいたリスク水準の導入と、市場データを用いたリスク水準の妥当性検証。
3. 確率的コピュラモデルを用いた計測と、DCC-GARCH モデル及び TVP コピュラモデルの比較と、より適切なモデルの選定。

これらの分析結果としては、以下の通りである。なお、2. におけるリスク水準の妥当性については、個々の金融機関に対する分析も併せて行った。

1. CoVaR 及び  $\mathcal{D}$ -CoVaR についての性質や特徴を把握し、Girardi and Ergün [7] による CoVaR と Adrian and Brunnermeier [1] による  $\mathcal{D}$ -CoVaR による定義のもとでの分析が適切であると判断した。
2. 設定したリスク水準に対して、リーマンショックなどリスクが顕在化したケースに対して適切な水準感を評価した。
3. 確率的コピュラモデルを用いたことで、DCC-GARCH モデルと TVP コピュラモデルよりも柔軟に依存関係を評価した。

以下は第 2 章で用いている CoVaR 及び  $\mathcal{D}$ -CoVaR の定義である。定義については、相関係数  $\rho$  に対する変化率を用いて、(狭義) 単調増加性を持ち、かつ、安定性があるものを基準として選択を行っている。また、この分析により、 $\mathcal{D}$ -CoVaR が CoVaR を包括する指標であることを確認している。

定義. (CoVaR の定義)

時点  $t$  において、個別金融機関  $i$  の株価損失率  $X_t^i$  が信頼水準  $p$  における最大損失以上となる場合における、金融システム全体の株価損失率  $Y_t$  の信頼水準  $q$  における「最大損失」を、 $CoVaR_{q,t}^{i,p}$  と表す。

$$CoVaR_{q,t}^{i,p} = \inf\{l \in \mathbb{R} | P(Y_t > l | X_t^i \geq VaR_{p,t}^i) \leq 1 - q\}. \quad (3.1)$$

定義. ( $\mathcal{D}$ -CoVaR の定義)

時点  $t$  における個別金融機関  $i$  の信頼水準  $q$  における、 $\mathcal{D}$ -CoVaR $_{q,t}^{i,p}$  を

$$\mathcal{D}\text{-CoVaR}_{q,t}^{i,p} = CoVaR_{q,t}^{i,p} - CoVaR_{q,t}^{i,0.5} \quad (3.2)$$

と表す。

CoVaR 及び  $\mathcal{D}$ -CoVaR は、システミック・リスクの水準を定量化したものであり、値が大きいくほど変量間で強く依存していることを表している。

しかし今までの研究においては、変量間で強く依存している期間を特定することでシステムミック・リスクが増大したと判断を行っているが、CoVaR 及び  $D$ -CoVaR の値自体には意味がなく、数値を比較するに留まっている。そのため、本論文では「危険水準」、「警戒水準」及び「注意水準」の3つの水準に分けて考えることにより、どの程度システムミック・リスクが顕在化しているかについて把握することを提案している。

なお、システムミック・リスク量については、早期警戒指標としての意味合いが強いため、水準の程度が高まるほどシステムミックの顕在化に対して対策を講じる必要がある。また、リーマンショックや東日本大震災はシステムミック・リスクが顕在化した事例の一つであると考えられることから、こうしたイベントを捉えることができているかについて、水準の妥当性を確認している。

第2章では DCC-GARCH モデル、TVP コピュラモデル及び確率的コピュラモデルを用いて計測を行っている。ここで、DCC-GARCH モデルについては Girardi and Ergün [7] を、TVP コピュラモデルについては Reboredo and Ugolini [12] を、確率的コピュラモデルについては Hafner and Manner [8] による方法により、動的に依存関係を算出し、CoVaR を計測している。

本章で使用したデータは、東証 33 業種別株価指数の「銀行業」、「証券・商品先物取引業」、「保険業」、「不動産業」及び「その他金融業」を用いることとし、データの期間を 2000/1/5~2015/12/31 とし、日次データを用いている。観測期間数は 3,926 である。また、「金融システム全体」の指数を、上記 5 つの業種別株価指数を時点毎に時価総額で加重平均した値として定義している。なお、データは全て対数損失率を用いて分析しており、水準は 99% を用いている。

また動的な周辺分布を用いて計測の有効性とリスク水準の妥当性を示したほか、静的な周辺分布と順位相関による分析により 3 モデル間の比較を行っている。

動的な周辺分布を用いた分析においては、3 モデル間で水準に大きな差異がないことを踏まえ、動的な周辺分布による分析の有効性を確認している。

リスク水準の妥当性については、個別金融機関の分析を通して確認している。G-SIBs として選定されている 3 メガバンクだけが危険水準を超えている期間があり、国際統一基準行は国内基準行よりも警戒~危険水準となる期間が多いことを確認した。こうした個別金融機関の分析からも設定したリスク水準の妥当性を確認している。次に、3 モデル間の比較については、静的な周辺分布と順位相関による分析で行っている。この分析から確率的コピュラが柔軟に依存関係を捉えていることが確認でき、ローリング順位相関（250 営業日の日次データから算出した順位相関のローリング推計）による分析の結果からも確

率的コピュラが柔軟に依存関係を評価することを確認した。

## 4 多次元 Hawkes 過程を用いた倒産リスク伝播構造の推定

第3章では、特に関東地区企業の比較的長期の倒産履歴データを対象に、業種および企業規模に基づいて複数カテゴリに区分して、倒産リスクの依存関係を Hawkes 過程で分析した。特に、Embrechts and Kirchner [4] で提案された多次元 Hawkes 過程のカーネル関数のノンパラメトリックな推定法を試みて、従来から用いられてきた指数減衰型カーネル関数で特徴付けられる強度モデルを最尤推定した結果との比較・考察することを通じて、多次元 Hawkes 過程による倒産リスク依存関係のモデル化およびその推定法としての Embrechts-Kirchner の推定法の応用可能性を検討した。第4章で用いられる多次元 Hawkes 過程の定義については以下の通り（記号の定義については本論文を参照）。

**定義 1** (多次元 Hawkes 過程).  $m$ -次元 計数過程のベクトル  $\mathbf{N}_t$  が  $m$ -次元 Hawkes 過程であるとは、各  $j \in [m]$  に対して  $N_t^j$  に付随する強度過程\*2が

$$\lambda_t^j = \mu^j + \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^t h_{i \rightarrow j}(t-s) dN_s^i \quad (4.1)$$

で与えられるものをいう。ただし、 $\mu^j \geq 0$  はタイプ  $j$  の「外生強度 (*exogenous intensity*)」、 $h_{i \rightarrow j}(u)$  は「カーネル関数 (*kernel function*)」と呼ばれる、任意の  $(i, j) \in [m]^2$  に対して非負値の確定的な可積分関数で、 $u < 0$  のときは  $h_{i \rightarrow j}(u) \equiv 0$  を満たすものとする\*3。

(4.1) 式における積分項の被積分関数  $h_{i \rightarrow j}(t-s)$  は具体的には「時点  $s$  で発生したタイプ  $i$  のイベントが、タイプ  $j$  のイベント発生強度に与えたインパクトが時点  $t$  では（すなわち  $t-s$  だけ経過後に）どの程度残っているか」を表していると解釈できる。したがって、(4.1) から分かるように、Hawkes 過程は強度過程のカーネル関数の形をどのように与えるかによって特徴づけられる。本章では、カーネル関数の形を指数減衰型カーネル関数としたものと Embrechts and Kirchner [4] で提案されている INAR モデルを用いた推定法との比較を行っている。

\*2 非負値（発展的可測）過程  $\lambda_t^j$  が計数過程  $N_t^j$  の強度過程であるとは、 $N_t^j - \int_0^t \lambda_s^j ds$  が  $\mathbb{F}$ -（局所）マルチンゲールになることと定義される。

\*3 Kirchner [10] では、 $\mu^j, h_{i \rightarrow j}(u)$  をそれぞれ *baseline intensity, excitement function* と呼んでいる。また、Embrechts and Kirchner [4] では  $\mu^j$  を *immigration intensity* と呼んでいる。本章では Bacry et al. [3] の呼び方に即した訳語を用いている。

倒産リスクの伝播構造を示す Hawkes グラフ表現に関して、Embrechts-Kirchner の推定法による結果は指数減衰型カーネル関数強度に対する最尤法による結果と大きな違いはないことを確認した。この結果は、Embrechts-Kirchner の推定法が、これまで多数応用されてきた指数減衰型カーネル関数で特徴付けした強度過程を最尤推定する手法に代替する推定法として十分に応用可能性があることを示唆していると考えられる。

ただし、Embrechts-Kirchner の推定法の方が、若干多めの依存関係の存在を示唆する傾向が見られた。この結果は、あくまでも今回のデータセットからの傾向の可能性であることに留意すべきであるが、企業規模カテゴリ別では、指数減衰型カーネル関数強度モデルが示唆する依存関係は、Embrechts-Kirchner の推定法で示唆される依存関係の中に含まれていた。その一方で、業種カテゴリ別では、指数減衰型カーネル関数強度モデルが示唆した一部の依存関係が、Embrechts-Kirchner の推定法では現れなかった。推定法の違いによって、示唆される依存関係の微妙な違いが発生する要因については、より注意深く検討する余地がある。

## 5 拡張 Hawkes 過程を用いた倒産リスク伝播構造の推定とストレステストへの応用

連鎖的な倒産発生を計量化した研究として、第 3 章における研究のほか Azizpour et al. [2] の研究が挙げられる。本研究では、米国の社債市場のデフォルト・クラスタリングの要因を説明するため、伝播 (contagion) 項だけでなくマクロ経済指標の変数項や潜在変数 (frailty) 項を用いており、contagion 項の説明力が高いことを結論づけている。第 3 章では contagion 項だけでモデル化を試みているが、複数のカテゴリに対して分析を行っており、Kirchner による INAR モデルを用いることで、従来のパラメトリックな関数に対する尤度推定ではなく、線形代数計算に帰着した計算手法により、デフォルト発生をモデル化したものである。

倒産発生モデル化については、マクロ経済指標を説明変数に加えることは非常に重要である。倒産は GDP や失業率といった指標との関連性が高く、これらのマクロ経済指標が悪化した場合、倒産が多く発生する傾向にある。こうした過去の経験を踏まえ、信用リスク管理では一定の経済シナリオを仮定したストレステストを実施しており、損失の大きさと経済指標を結びつけた感応度により将来損失額を見積もり、与信ポートフォリオを管理している。

第 4 章では第 3 章の研究に対して INAR モデルにマクロ経済指標を加えた拡張モデルにより分析を行っている。第 3 章と同様に日本における比較的長期の倒産履歴データを対象に、倒産発生イベントを業種に基づき分類することで複数のイベントタイプを作ってお



り、マクロ経済指標を含まない INAR モデルとの比較分析を通じて、業種間でのデフォルト発生の伝播構造の推計において、マクロ経済指標が有効に機能することを示したものである。

また、マクロ経済指標を含むことで、前述したストレステストの実施が可能となり、第4章では推計したモデルを用いて幾つかのテスト用のシナリオを用意し、マクロ経済指標との感応度を確認した上で、実務の観点からもマクロ経済指標を組み込んだモデルの方が有効であることを示している。

第4章では、Hawkes 過程を以下の通り拡張することで分析を行っている。

**定義 2** (拡張 Hawkes 過程).  $m$ -次元 計数過程のベクトル  $\mathbf{N}_t$  が  $m$ -次元 拡張 Hawkes 過程であるとは、各  $j \in [m]$  に対して  $N_t^j$  に付随する強度過程\*4が

$$\lambda_t^j = \mu^j + \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^t h_{i \rightarrow j}(t-s) dN_s^i + \sum_{k=1}^{\ell} \beta_k^j M_t^k \quad (5.1)$$

で与えられるものをいう。ただし、 $\beta_k^j$  は、マクロ経済指標値  $M_t^k$  に付随する係数である。

本定義に基づく分析では、Embrechts and Kirchner [4] により提唱されている INAR モデルによる分析を行ったほか、これらのモデルにマクロ経済指標を組み込んだ手法により比較を行い、実務の観点からもマクロ経済指標を含んだモデルのほうが有用性が高いことを示すことを目指した。

まず、倒産リスクの伝播構造を示す Hawkes グラフ表現に関して結果に大きな違いがなく、マクロ経済指標に関係なく伝播構造を捉えていることが確認できた。ただ、倒産件数がピークとなるリーマン期前後ではマクロ経済指標の効果が反映され、マクロ経済指標を含んだ INAR モデルの方が、AIC や平方二乗誤差といった評価指標に対して説明力が高いことが示された。

また、倒産件数の予測という観点からはマクロ経済指標を含むべきであり、複数のシナリオによりマクロ経済環境を仮定した際の倒産の予測件数は概ねリーマン期前後のピーク時の水準まで上昇し、モデルのマクロ経済指標に対する感応度も十分にあることが確認され、実務の観点からも有用性が示された。

一方で、Azizpour et al. [2] などで示唆されている結果を踏まえると、さらに潜在変数 (frailty) 項を組み込んだモデルに拡張することが考えられ、これらの事項については、今後の課題である。

---

\*4 非負値 (発展的可測) 過程  $\lambda_t^j$  が計数過程  $N_t^j$  の強度過程であるとは、 $N_t^j - \int_0^t \lambda_s^j ds$  が  $\mathbb{F}$ - (局所) マルチンゲールになることと定義される。

## 参考文献

- [1] T. Adrian and M. Brunnermeier (2016), “CoVaR”, *American Economic Review*, 106(7) 1705–1741
- [2] S. Azizpour, K. Giesecke, G. Schwenkler (2016), “Exploring the Sources of Default Clustering”, *Working paper*, <http://people.bu.edu/gas/papers/exploring.pdf> (accessed on April, 26, 2017). (To appear in *Journal of Financial Economics*.)
- [3] E. Bacry, I. Mastromatteo and J.-F. Muzy (2015), “Hawkes processes in finance”, *Working paper*, arXiv:1502.04592.
- [4] P. Embrechts and M. Kirchner (2018), “Hawkes graphs”, *Theory of Probability & Its Applications*, 62(1), 163–193.
- [5] P. Embrechts, A. J. McNeil and D. Straumann (2002), “Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls”, *Risk management: Value at risk and beyond*, 176–223
- [6] E. Errais, K. Giesecke and L. R. Goldberg (2010), “Pricing credit from the top down with affine point processes”, *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 1, 642–665.
- [7] G. Girardi and A. T. Ergün (2013), “Systemic risk measurement: Multivariate GARCH estimation of CoVaR”, *Journal of Banking & Finance*, 37 3169–3180
- [8] C. M. Hafner and H. Manner (2012), “Dynamic stochastic copula models: Estimation, inference and applications”, *Journal of Applied Econometrics*, 27 269–295
- [9] A.G. Hawkes (1971), “Spectra of self-exciting and mutually exciting point processes”, *Biometrika*, 58, 83–90.
- [10] M. Kirchner (2017), “An estimation procedure for the Hawkes process”, *Quantitative Finance*, 17(4), 571–595.
- [11] A. J. Patton (2006), “Modelling asymmetric exchange rate dependence”, *International Economic Review*, 47(2) 527–556
- [12] J. C. Reboredo and A. Ugolini (2015), “Systemic risk in European sovereign debt markets: A CoVaR-copula approach”, *Journal of International Money and Finance*, 51 214–244
- [13] 戸坂 凡展・吉羽 要直 (2005)、「コンピュータの金融実務での具体的な活用方法の解説」、『金融研究』、第 24 巻別冊 2 号、115–151