2014 年度
博士学位請求論文要旨

Essays on Risk Premiums in Higher-Order Moments of Financial Asset Returns

一橋大学大学院 国際企業戦略研究科
金融戦略・経営財務コース
ID10F002
佐々木 洋

1 本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである.

2　本研究の目的

ファイナンス研究における飛躍的な発展の過程の中で, 特に 1990 年代以降, 資産価格リターンの高次モーメント (分散, 歪度, など) に関する確率モデルの構築, および同モデル

の導入による資産価格への影響に関する研究が盛んに行われている．Heston[1993] により提唱された確率ボラティリティモデルや, Christoffersen et al.[2012] により実証された確率ジャンプ強度モデルなどは, 同時にその確率変動の対象となる指標に関してリスクプレミアムの存在を示唆することになる．この論文は, 昨今において様々な観点からその存在やアセットプライシングへの影響などに関して議論・検証されている, 資産価格リターンの分散や歪度など高次モーメントに対するリスクプレミアム[*1] を, 様々な観点からより深く考察・検証することを目的としている．

本論文は全体として五つの章から構成されており, 特に Chapter 2 から Chapter 4 において, 上述した本研究のメインテーマについて幾つかの観点から論じられている．Chapter 2 では一般均衡モデルのフレームワークから分散リスクプレミアム, および歪度リスクプレミアムの具体的な表現を与え, 同時にそれらのリスクプレミアムが持つ将来の株価リターン予測可能性に関して実証的な観点から検証している．また Chapter 3 では, 部分均衡 (金融オプション市場における需給均衡) モデルの枠内で分散リスクプレミアムの具体的表現と, 同リスクプレミアムの符号条件を具体的に考察し, 最後の Chapter 4 では, 分散リスクプレミアムを実証的に推定する際における, モデルパラメータ推定リスクの影響の大きさを理論面, および実証面の双方から検討している．以下では, そのような具体的な考察に至った背景とモチベーションを, 先行研究事例も踏まえながら具体的に振り返ってみることにする．

ボラティリティリスクプレミアム[*2] の存在とその符号条件に関して実証的な側面からより深く, 精密に議論された先行研究の先駆けとしては, Bakshi and Kapadia[2003] が挙げられるであろう．これは S & P500 指数オプションに関する実際の市場取引データを利用して, オプションポジションに対するデルタヘッジ後の損益水準からボラティリティリスクプレミアムの存在と符号に関する有意性を測ろうとする試みであり, 同リスクプレミアムに関する負値性を最初に主張した論文として非常に注目度の高い先行研究の一つになっている．当研究は, ボラティリティリスクプレミアムの存在を実証的に観測するための, 理論的根拠に基づく一つの具体的方法を提示すると同時に, その存在に関する高い有意性を実証分析を通して確認した初めての研究として興味深いものである．但しその一方で, 同リスクプレミアムが如何なる状況下で存在するのか, その理論的背景, すなわち,

[*1] 先行研究においては一般的に, 主観確率測度の下における各高次モーメントの期待値と, リスク中立確率測度の下における同高次モーメントの期待値との間の差分量として定義される．

[*2] 資産価格リターンのボラティリティが確率的に変動することに対して要求されるリスクプレミアムのこと．ボラティリティに関する主観確率測度の下における期待値と, リスク中立確率測度の下における期待値との間の差分量として定義される．ここでは分かり易さの為に敢えて, 分散 (バリアンス) リスクプレミアムとボラティリティリスクプレミアムを区別せずに用いることにする．

同リスクプレミアムの存在を保証するための理論モデルに関しては考察の対象外としている.

ボラティィリティ (又は, バリアンス) リスクプレミアムの存在に関して理論的な根拠を与えた先行研究の一つとして Eraker[2008] が挙げられる. 同論文内で提唱されているモデルは, Bansal and Yaron[2004] で元々提唱されていた Long Run Risks Model がベースとなっており, Epstein and Zin[1989] 型再帰的効用を前提とした代表的経済主体モデルである. 同モデルを前提とした一般均衡市場においては, 代表的経済主体に対して Early Resolution の仮定[*3] を置くことによって, 同リスクプレミアムの負値性が理論的にも確認されることが明らかにされている. Bansal and Yaron[2004] により初めて提唱された Long Run Risks Model は元来, エクイティプレミアムパズルやリスクフリーレートパズルなど, ファイナンス研究の分野において以前から指摘されていた実証面からの問題を解決するための新たなモデルとして提唱されたものであり, 同リスクプレミアムの存在を理論的に主張することが第一義的な目的ではなかったものの, 同リスクプレミアムの存在に関する理論的根拠も副次的に与えることに成功しているモデルの一つである.

Bansal and Yaron[2004], および, その後続研究により提唱された市場モデルは条件付正規となる離散時間モデルである. これらの先行研究では月次データを用いたモデルのカリブレーションと, その結果に関する考察がなされているが, 各単位期間における消費変化には条件付正規分布の仮定が置かれている. 結果, その仮定から導出される資産価格リターンの確率分布も条件付正規分布となることが示される. しかしながら一方で, 昨今の金融市場において, あらゆる資産を原資産とするオプション価格を観察すると, 1 日から 1 週間などという短期の残存期間においても, その価格から推定されるインプライド分布は (左右対称ではなく) 大きな歪みを持っていることを確認することが出来る. よって自然な流れとして, この条件付正規型離散時間モデルを拡張した上で, 資産リターンに関する高次モーメントの確率的変化がもたらすリスクプレミアムの理論的根拠を考察することに関して動機付けを得ることが出来る.

また一方で, 資産価格リターンの高次モーメントに関するリスクプレミアムの存在自体は, 基本的には主観確率測度の下での将来の資産価格リターンに関する確率分布と, リスク中立確率測度の下での同リターンに関する確率分布との間の差と結び付けて考えることが出来る. 特に実証研究の過程においては, リスク中立確率測度の下での資産価格リターンに関する確率分布はオプション市場価格データを用いて推定されることが多いが, そのオプション市場における価格形成の特徴に焦点を合わせることで, 資産価格リターンの高

[*3] 異時点代替弾力性 (Intertemporal Elasticity of Substitution)>1 の仮定のこと.

次モーメントに関するリスクプレミアムの存在に関して, 新たに興味深い考察を得ることが出来る.

Gârleanu et al.[2009] では, オプション取引に対するエンドユーザーの需要量がオプション価格に対して与える影響を, 動学的一般均衡モデルのフレームワークから考察しており, そこでは一般的に, あるオプション取引に対する需要量が, そのオプションも含めたオプション取引全般の価格水準に対して本質的に影響を与えることが示唆されている. その考察から, オプション市場におけるオプション取引の需要量が, オプション価格への影響を経由して, リスク中立確率測度の下における資産価格リターンボラティリティ[*4] に影響を与えている可能性があることが予想される. すなわち, オプション取引の需要量がボラティリティリスクプレミアムの存在と符号条件に対して影響を与えている可能性があることが予想されるのであるが, Gârleanu et al.[2009] のモデル自体はオプション取引に関するエンドユーザーの需要量を外生的に与えており, 需給均衡下におけるボラティリティリスクプレミアムの存在と符号条件に関して深く考察するためには, 需給均衡に至る過程も含めてモデルに内装した上で, 同リスクプレミアムの存在に関して議論する必要がある. オプション市場におけるマーケットメーカーとエンドユーザー双方の最適化問題を考察することによって, エンドユーザーにとってのオプション取引に関する需要量を内生的に与えることで, 需給均衡時におけるボラティリティリスクプレミアムの存在に関して, より詳細な考察を与えることが出来る可能性がある.

上記内容を主な背景として, 本研究では既存のモデル・フレームワークを拡張, または新たな観点からの金融市場モデルを提唱することにより, 資産リターンに関する高次モーメントの確率的変化がもたらすリスクプレミアムの存在についての理論的根拠と, その周辺の話題に関して, より深い観点からの考察を与えている. 本研究の構成を再度, 大雑把に整理すると, Chapter 2 では「一般均衡モデルに基づく歪度リスクプレミアムの定式化と, 同リスクプレミアムの資産リターンに対する予測可能性」を, Chapter 3 では「部分均衡 (需給均衡) モデルに基づく分散リスクプレミアムの定式化と, 付随する話題に関する考察」を, また, Chapter 4 では「ボラティリティリスクプレミアム推定値に対するモデル推定リスクの影響」を, 各々考察し, 最後の Chapter 5 で結論を与えている.

[*4] いわゆる, オプションインプライド・ボラティリティのことを意味している.

3 歪度リスクプレミアムと株価予測可能性

本論文の第 2 章「The Skewness Risk Premium in Equilibrium and Stock Return Predictability」では, Bansal and Yaron[2004] の Long Run Risks(LRR) Model を拡張し, 一般均衡市場において資産価格リターンの分散や歪度など高次モーメントに関するリスクプレミアムの具体的表現を与え, その特徴を考察している. 消費成長過程 (Consumption Growth Process) が確率ボラティリティとジャンプを同時に含むケースを対象とし, Epstein-Zin 型 Recursive Utility を前提とした Asset Pricing Equation から確率ボラティリティファクター, ジャンプ強度ファクター, 各々に由来する Price of Risk を求めると同時に, それらの Price of Risk を用いて分散リスクプレミアム (Variance risk premium), 歪度リスクプレミアム (Skewness risk premium) などの高次モーメントに関するリスクプレミアムを理論的, 実証的観点から具体的に分析している.

当分析で新たに提案されているモデルは, 基本的には Bansal and Yaron[2004], 或いはその拡張型である Drechsler and Yaron[2011] に対する修正型モデルと認識することが出来る. Drechsler and Yaron[2011] 同様, 当分析における LRR モデルにおいても消費成長過程, および, そのボラティリティにはジャンプ項が付加されているが, 一方で Drechsler and Yaron[2011] とは異なり, 当分析では当該ジャンプ項に関連する強度 (jump intensity) 自体に確率的構造を与えている. *5 具体的に当分析で新たに提案されている拡張型 LRR モデルにおける消費成長過程, および, 配当成長過程の表現は以下の内容となっている.(記号の定義に関する詳細は本論文を参照のこと)

1) Consumption growth dynamics :

$$\triangle c_{t+1} = \mu_g + x_t + \varphi_\eta \sigma_t \eta_{t+1} \tag{3.1}$$

2) Dividend growth dynamics :

$$\triangle d_{t+1} = \mu_d + \rho_d x_t + \varphi_\zeta \sigma_t \zeta_{t+1} \tag{3.2}$$

更に上記消費成長過程, および, 配当成長過程に含まれる各状態変数過程は以下の形式で与えられている (同様に, 記号の定義に関する詳細は本論文を参照のこと):

3) Economic Fluctuations :

· LRR factor :

$$x_{t+1} = \rho_x x_t + \varphi_e \sigma_t e_{t+1} + J_{x,t+1} \tag{3.3}$$

*5 一方, Drechsler and Yaron[2011] では, ジャンプ項の強度は消費成長に関する分散過程のアフィン形式として定義されている.

· Variance :

$$\sigma_{t+1}^2 = \mu_\sigma + \rho_\sigma \sigma_t^2 + \sqrt{q_t} w_{t+1} + J_{\sigma^2,t+1} \tag{3.4}$$

· Variance of Variance :

$$q_{t+1} = \mu_q + \rho_q q_t + \varphi_\xi \sqrt{q_t} \xi_{t+1} \tag{3.5}$$

· Jump Intensity :

$$\lambda_{t+1} = \mu_\lambda + \rho_\lambda \lambda_t + \varphi_u \sqrt{q_t} (\rho \xi_{t+1} + \sqrt{1-\rho^2} u_{t+1}) \tag{3.6}$$

Drechsler and Yaron[2011] では Jump intensity に対して $\lambda_{t+1} = l_0 + l_1 \sigma_{t+1}^2$ というアフィン形式を仮定している一方で, 当分析では独立して (3.6) 式で表現されるモデルを導入し, その仮定の下で資産価格リターンの分散や歪度など高次モーメントに関するリスクプレミアムの具体的表現を与えると同時に, その特徴を詳しく考察している. [*6] LRR モデルにおけるジャンプ項の強度に関して, このように確率的な構造をモデルとして更に与えることにより, 一般均衡市場における資産価格リターン分布の歪度 (および, その時系列推移) に関して, 実証データとより整合的な特徴を付与することが出来る. 例えば Drechsler and Yaron[2011] における Jump intensity モデル：$\lambda_{t+1} = l_0 + l_1 \sigma_{t+1}^2$ では, 歪度リスクプレミアムを生じさせる本質的な要因が分散リスクプレミアムを生じさせる本質的な要因, すなわち, 消費成長のボラティリティが確率的変動を有していること, と同一である為, 上記二つのリスクプレミアムは高い相関関係を有することが予想されるが, 実証データでは同二つのリスクプレミアムに関しては互いに, 非常に低い相関関係を維持していることが確認出来る. [*7] その他にも存在する幾つかの実証的根拠により, ジャンプ強度に対する独立した確率モデルの導入が必要とされる. 当章ではこのようなモチベーションの下で Drechsler and Yaron[2011] を更に拡張するように新たに (3.6) 式を導入しているが, その結果, 分散リスクプレミアムとは独立した形で歪度リスクプレミアムの具体的表現を与えることに成功しており, また, 株価の期待超過リターンに関する具体的表現において歪度リスクプレミアムが独立して重要な役割を果たすことも同時に示されている. [*8]

歪度リスクプレミアムに関して, 株価の期待超過リターンに対する本質的寄与が示された結果を受けて, § 2.4.3 では同リスクプレミアムの株価 (S & P500 指数) リターンに対

[*6] (3.6) 式を新たに導入した実証的側面からのモチベーションの詳細に関しては, 本論文を参照されたい.
[*7] Table. 2.2 を参照のこと.
[*8] Proposition4 において, 株価の期待超過リターンは, 株価リターンの分散, 分散リスクプレミアム, および, 歪度リスクプレミアム, の 3 ファクターによる線形結合で表現されることが示されている.

する予測可能性を検証している．Table.2.3 において同株価リターンに対する予測回帰の結果が示されているが, この結果においても, 分散リスクプレミアムとは独立して, 歪度リスクプレミアムのファクターとしての予測力の高さ (統計的有意性) が具体的に示されている．更に株価リターン予測に関してこれまでに学術界において提唱されてきた幾つかのファクターとの間でも, ファクターとしての予測力の比較検証を実施しているが, そのような比較検証においても, 他ファクターと比較し, 分散リスクプレミアムとは独立して歪度リスクプレミアムに関する相対的な高い予測力が示されている．当章ではこのような結果, 分散リスクプレミアム同様, 歪度リスクプレミアムに関しても一般均衡市場において, その存在や株価の期待超過リターンに対する本質的な寄与を示す理論的な根拠を与えると同時に, 同リスクプレミアムが株価リターンに対して高い予測力を有することも実証的に示すことが出来たことが一つの大きな成果と言える．資産価格に関して幾つかのパズルを含む実証的特徴を捉えるモデルを構築する上で, 消費成長過程, および, 消費成長のボラティリティ過程に含まれるジャンプ成分の強度に関する独立した確率モデル化が重要であることが当章において明示的に示されている．

4　需給均衡と分散リスクプレミアム

本論文の第 3 章「An Approach to the Option Market Model Based on End-user Net Demand」では, オプション市場の参加者であるマーケットメーカー, および, エンドユーザーの双方に関する Preference を考慮した需給均衡下での Pricing Kernel についての決定問題と, 関連する幾つかの話題に対するインプリケーションを考察している．原資産の価格変動過程として確率ボラティリティ構造などを仮定した非完備市場においては, オプション市場のマーケットメーカーはエンドユーザーとの間で行うオプション取引により, 完全にはヘッジ不可能なリスクを負うことになる．その結果, 当章ではまず, マーケットメーカーが提示するオプション取引価格に対してエンドユーザーがもたらすオプション取引に関する Demand Pressure が直接的な影響を与え得ることを示している．

当章では, マーケットメーカーはエンドユーザーからのオプション取引需要に対してオプション取引をした結果, 抱えたオプションポジションを, デルタヘッジによってリスクコントロールすることを前提として考察を進めている．マーケットメーカーにとってはオプション取引の結果, その後のデルタヘッジによって完全にはヘッジ不可能な部分から生じ得る損益の変動リスクも考慮した上でオプション取引価格を設定し, エンドユーザーに提示することになる．一方でエンドユーザーは, マーケットメーカーからそのようにして提示されたオプション価格を所与のものとして, オプションも含む自らの金融資産ポジ

ション全体を最適化し, ポートフォリオ構築を実施する. このような観点に基づき, 当章ではマーケットメーカー, および, エンドユーザー, 双方にとっての期待効用最大化問題を定式化し, その問題を具体的に解くことにより, オプション取引に関する需給均衡下における Pricing Kernel(均衡 Pricing Kernel) を具体的に導出している.

均衡 Pricing Kernel を詳細に考察することにより, オプション市場における価格決定メカニズムに関して様々なインプリケーションを得ることが出来る. 例えばあるオプションに関する Demand Pressure がその他のオプション価格に対して与える影響の大きさは, 双方のオプションポジションに関するヘッジ不可能な部分の共分散の大きさに比例することが同時に示される. この結果自体は以前, Gârleanu et al.[2009] でも類似の結果が示されており, 新しい知見ではないものの, 当章では更に先述の均衡 Pricing Kernel を用いて, オプション取引に関する需給均衡市場における分散リスクプレミアムの存在と, その符号条件に関しても具体的に新たな考察を与えている.

当章における Proposition9 では, オプション取引に関する需給均衡市場において, 時刻 u における分散リスクプレミアム ξ_u^* が具体的に以下の表現式によって与えられることを示している (記号の定義に関する詳細は本論文を参照のこと):

$$\xi_u^* = \psi_u(\delta^*, A, U^E, v, \rho, S_u) \times {\sigma_u}^2 \quad , \tag{4.1}$$

where

$$\psi_u(\delta^*, A, U^E, v, \rho, S_u)$$

$$\equiv \frac{-2c_1^* v\rho}{\mathbb{E}[U^{E'}(W_T^E(\delta^*; S_T))]} \frac{S_u U^{E''}(W_u^E(\delta^*; S_u))\Big(1 + \delta^* \dfrac{d}{dS_u} \dfrac{e^{-r(T-u)}}{M_u} \mathbb{E}\Big[g_1(S_T) M_T \mid \mathcal{F}_u\Big]\Big)}{M_u^{\delta^*}}.$$

ここで σ_u^2 はオプションの原資産価格変動に関する分散過程を表しており, U^E はエンドユーザーの効用関数を, また, δ^* は需給均衡状態におけるエンドユーザーのオプション取引に関する需要関数を表している. この結果では, 時刻 u 時点における分散リスクプレミアムは, 同時点における分散に一定の定数パラメータを掛けたものとして表現されており, Heston[1993] などで前提とされた分散リスクプレミアムの置き方[*9] と整合的な結果となっている. しかし, 更に同結果では, その定数パラメータ自身がマーケットメーカー, および, エンドユーザーの Preference や[*10] , 需給均衡時におけるオプション取引の需要

[*9] Heston[1993] では分散リスクプレミアムに関して $\xi_u = \lambda * \sigma_u^2$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, という仮定を置いた上でリスク中立確率測度を与え, リスク中立評価法に基づきオプション価格評価式を具体的に導出している.

[*10] マーケットメーカーの Preference に関する情報は, ψ_u の定義式の中に現れるパラメータ c_1^* の中に含まれている. c_1^* の定義に関する詳細は本論文を参照のこと.

量にも依存していることを詳細に示している結果となっており, 通常のパラメータ設定の下では, この分散リスクプレミアムはマイナスとなり得ることも同表現式により確認することが出来る. [11] これは, Bakshi and Kapadia[2003] など数多くの先行する実証研究で示唆されている負の分散リスクプレミアムの存在を, 需給均衡モデルの側面から理論的にサポートする結果としても捉えることが出来ることを明示的に示していると考えられる. オプション取引に関する需給均衡モデルから分散リスクプレミアムの存在と符号条件を理論的に考察している内容は, 当章において示されている新しい結果の一つと言える.

当分析におけるもう一つのインプリケーションは, Aït-Sahalia and Lo[2000], Jackwerth[2000], Ziegler[2007], などを中心に最近になって指摘されている, Pricing Kernel Puzzule や Implied Risk Aversion Smile などとの関連性に対して与えられる. 完備市場において消費 CAPM が成立する世界では, リスク回避的な代表的経済主体にとっての Pricing Kernel は Aggregate Consumption に対して単調減少関数となっているはずである. しかし, その一方, Aït-Sahalia and Lo[2000], Jackwerth[2000], などでは, S & P500 指数, および, そのオプション市場を対象とした実証分析の結果, 原資産価格とオプション価格を用いて推定される Pricing Kernel や, 更には Implied Risk Aversion Function に関する形状が, 局所的に負値や単調増加となっている傾向を持つことが指摘されている. また, Ziegler[2007] では, そのような Implied Risk Aversion Smile が観測される要因として, Misestimation of investors' beliefs, Preference aggregation, Heterogeneous beliefs, などの幾つかの影響を候補として挙げ, その説明力に関して考察しているが, 消費 CAPM が成立するような完備市場においては, そのような要因だけでは同現象を上手く説明することが出来ず, 市場の非完備性など更なる要因を検討することが必要であることを主張している. 当分析では, 実証的に観測される Pricing Kernel や Implied Risk Aversion Function の形状を説明する上で, オプション市場における需給均衡時の Demand Pressure が重要なファクターとなり得ることを示しており, ある一定の条件下においては, エンドユーザーからのオプション取引に関する Demand Pressure によって, Implied Risk Aversion の単調減少性が崩れ得ることをシミュレーション結果によって具体的に示している.

---

*11 具体的にどのようなパラメータ条件の下でこの分散プレミアムがマイナスとなり得るのかに関する具体的な考察は, 本論文の § 3.3.2. を参照のこと.

5　分散リスクプレミアムとモデル推定リスク

金融オプションの価格評価を行う上で重要なファクターの一つである原資産ボラティリティの変動をある確率過程として捉え, その仮定の下でオプション価格を求めるアプローチは広く一般化されつつある．そのボラティリティ過程の確率的変動に対して要求されるリスクプレミアムのことを一般に, ボラティリティリスクプレミアムと言う．本論文の第 4 章「Understanding Delta-hedged Option Returns in Stochastic Volatility Environments」では, そのボラティリティリスクプレミアムの水準を実証的に推定する過程において, 市場参加者が想定する価格変動モデルのパラメータ推定リスク (Parameter estimation risk) の影響がどの程度, 織り込まれているのかを具体的に考察している．

Bakshi and Kapadia[2003] では, オプションポジションに対する Delta-hedged gain and loss(以下, DHGL で表記) の水準自体が, ボラティリティリスクプレミアムの水準自体と直接的に結び付いていることを数学的な表現式を用いて具体的に示している．但しその理論と結果は, 市場で取引されているオプション価格が, 本来は分かり得ない「真の」価格変動モデルに関して正確にプライシングされている状況を想定した上での帰結となっており, 仮にオプション市場価格が真の価格変動モデル, および, そのパラメータに基づいて正確にプライシング出来ている訳ではない状況下においては, Bakshi and Kapadia[2003] の結果には誤差が大きく含まれていると考えられる．当章では, モデルのパラメータ推定リスクまで加味した上で DHGL の具体的な表現式を求めた上で, DHGL 自体にはボラティリティリスクプレミアムの影響に加えてパラメータ推定リスクの影響も含まれていることを, まずは数学的な観点から考察している．

当章の § 4.2 では, 原資産の価格過程が確率ボラティリティ構造に従うという仮定に加えて, 更に市場参加者はその真のモデル構造を正確に推定することが出来ず, パラメータ推定リスクが存在するという仮定まで置いた上で DHGL(時刻 t から $t+\tau$ までの累積 DHGL を, ここでは $\Pi^G_{t,t+\tau}$ で表記) の期待値に関する具体的な表現式を求めており, 具体的には以下の表現式を導出している (各記号の詳細な定義に関しては本論文を参照):

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big[\Pi^G_{t,t+\tau}\big] = \int_t^{t+\tau} & \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\frac{1}{2}(\eta_u^2 - \tilde{\eta}_u^2)\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma^2}(u,S_u,\sigma_u) \\
& + (\rho\eta_u - \tilde{\rho}\tilde{\eta}_u)\sigma_u S_u \frac{\partial^2 G}{\partial S \partial \sigma}(u,S_u,\sigma_u) + (\theta_u - \tilde{\theta_u})\frac{\partial G}{\partial \sigma}(u,S_u,\sigma_u)\Big] du \\
& + \int_t^{t+\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\lambda_u \frac{\partial G}{\partial \sigma}(u,S_u,\sigma_u)\Big] du.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

ここで S_u は原資産価格過程, σ_u は原資産価格変動に関する確率的ボラティリティ過程, λ_u はボラティリティリスクプレミアム過程, G はオプション価格を表しており, また, θ_u, η_u, ρ, の各変数は, 当章において前提とされている確率ボラティリティモデル (本論文における (4.1) 式) のモデルパラメータを表している. 特にそのパラメータの中でも, 記号の上に˜が付いているもの, すなわち, $\tilde{\theta_u}$, $\tilde{\eta_u}$, $\tilde{\rho}$, に関しては, 市場参加者が信じている (真のモデルパラメータとは異なる) パラメータを表しており, そうではないもの, すなわち, θ_u, η_u, ρ, 自体は本来の真のモデルパラメータを表しているものとしている.

上記 (5.1) 式の解釈は以下のように与えることが出来る. 仮にオプション市場における市場参加者が想定している原資産の価格変動過程が, 本来の原資産価格変動過程 (本論文における (4.1) 式) と同じ場合, すなわち, $\theta_u = \tilde{\theta_u}$, $\eta_u = \tilde{\eta_u}$, $\rho = \tilde{\rho}$, が仮定出来る場合には, 同式の右辺第一項はゼロとなり, DHGL の期待値は右辺第二項のみ, すなわち, ボラティリティリスクプレミアムによる影響項のみで表現される. しかし, その一方で, 仮にオプション市場における市場参加者が想定している原資産の価格変動過程が, 本来の原資産価格変動過程とは異なる場合には, 期待 DHGL にはボラティリティリスクプレミアムの影響項以外に関する要因, すなわち, 上記 (5.1) 式の右辺第一項で表現されるパラメータ推定リスクによる要因が影響することになり, 必ずしもボラティリティリスクプレミアムのみで期待 DHGL の水準が決定される訳ではないことが分かる.

当章における後半部分では, 実際のヒストリカルデータを用いて通貨 (USD-JPY) オプション市場におけるボラティリティリスクプレミアムの推定を時系列的に行うと同時に, デルタニュートラルヘッジされた通貨オプションポートフォリオから生じる損益水準を具体的にバックテストにより推定し, DHGL の源泉を上記 (5.1) 式に基づき詳細に考察している. データとしては 2003 年 10 月以降の米ドル-円レート, および, 同為替レートを原通貨とするヨーロピアンオプションの価格データを用いている. 当実証分析において確認された主要な結果としては, (1) 当該通貨オプション市場におけるボラティリティリスクプレミアムは時系列的に一定ではなく, 時間と共に大きく変動していること, (2) 当該通貨オプション市場におけるボラティリティリスクプレミアムは時期を通して概ねマイナスの値を取っており, 特に 2007 年夏頃から 2008 年末に掛けては過去に比べて非常に大きなマイナスのボラティリティリスクプレミアムとなっていたこと, (3) 当バックテスト期間における当該通貨オプションの市場価格には, オプション市場参加者が想定するモデルのパラメータ推定リスクによる影響が大きく含まれており, 特に 2008 年後半におけるリーマン危機後の価格水準には, 同リスクによる影響が約 13 %も含まれている可能性があること, などが挙げられる. 特に (3) の結果により, オプションに対する DHGL には, 対応する期間におけるボラティリティリスクプレミアムから生み出される影響のみではなく, パ

ラメータ推定リスクの影響も無視出来ない大きさで存在していることを, 上記 (5.1) 式で表現されるような理論的側面のみではなく, 実証的な観点からも確認することが出来た.

6 結論と課題

本研究では上述の通り, 既存のモデル・フレームワークを拡張, または新たな観点からの金融市場モデルを提唱することにより, 金融資産リターンに関する高次モーメントの確率的変化がもたらすリスクプレミアムの存在についての理論的根拠と, その周辺の話題について, 既存研究に対してより深い観点からの考察を幾つかの方法に基づき与えている. 具体的には, Chapter 2 において「一般均衡モデルに基づく歪度リスクプレミアムの定式化と, 同リスクプレミアムの資産リターンに対する予測可能性」を, Chapter 3 では「部分均衡 (需給均衡) モデルに基づく高次モーメント・リスクプレミアムの定式化と, 付随する話題に関する考察」を, また, Chapter 4 では「ボラティリティリスクプレミアム推定値に対するモデル推定リスクの影響」を, 各々考察している. 特に Chapter 2 では, 一般均衡モデル下における歪度リスクプレミアムの存在と, 株価リターンに対する同プレミアムの予測可能性に関する検証を与えており, また Chapter 3 では, 需給均衡下におけるバリアンスリスクプレミアムの存在を, オプション市場における価格形成の過程をモデル化することによって具体的に示すことが出来た. Chapter 4 では, ボラティリティに関するリスクプレミアムの推定時におけるモデルパラメータ推定リスクの影響の大きさに関して, 実証的な観点から具体的な考察を与えており, 同推定リスクの影響がオプション取引価格に対して無視出来ない程の大きさで存在していることをヒストリカルシミュレーションによって示している.

本研究を更に発展させるために残されている課題は複数存在しているが, 特に, 資産価格リターンに関する高次モーメントのリスクプレミアムを実証的な観点から如何に正確に推定するか, その推定手法に関してはまだ数多くの課題が残されているであろう. リスク中立確率測度の下における資産価格リターンの確率分布同様, 主観確率測度の下における各高次モーメントの期待値を推定することも実際には非常に奥の深い問題であり, 本研究で採用された方法以外にも, 様々なアプローチが残されている. 今後も引続き, 同リスクプレミアムの具体的な推定手法とその結果 (推定値) に関して, より深く考察していく必要がある.

また, 本研究で扱われている全てのモデルは Rational Expectations Hypothesis (合理的期待形成仮説) が前提となっており, 例えばモデル自体の不確実性 (Model Uncertainty) などは考慮されていない. 更に, 一般的に Model Uncertainty が存在する場合, その存在

が資産価格リターンの高次モーメントに関するリスクプレミアムに対して追加的にどのような影響を与えるのかに関しては非常に興味深い問題である．同課題に関しても，本研究に対する今後の発展の過程の中で具体的に深く考察していきたい．

参考文献

[1] Aït-Sahalia, Y., and Lo., A., W., 2000, Nonparametric Risk Management and Implied Risk Aversion, *Journal of Econometrics*, **94**, 9-51.

[2] Bakshi, G., and Kapadia, N., 2003, Delta-hedged gains and Negative Market Volatility Risk Premium, *The Review of Financial Studies*, **16**, 527-566.

[3] Bansal, R., and A. Yaron, 2004, Risks for the Long Run: A Potential Resolution of Asset-pricing Puzzles, *Journal of Finance* **59**, 1481-1509.

[4] Christoffersen, P., K., Jacobs, and C., Ornthanalai, 2012, Dynamic jump intensities and risk premiums: Evidence from S & P500 returns and options, *Journal of Financial Economics* **106**, 447-472.

[5] Drechsler, I. and A. Yaron, 2011, What ' s vol got to do with it？, *Review of Financial Studies* **24**, 1-45.

[6] Epstein, L., and S. Zin, 1989, Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns: A theoretical framework, *Econometrica* **57**, 937-969.

[7] Eraker, B., 2008, The volatility premium, Working Paper, Department of Finance, University of Wisconsin.

[8] Gârleanu, N., Pedersen, L., and Poteshman, A., 2009, Demand-Based Option Pricing, *The Review of Financial Studies*, **22**, 4259-4299.

[9] Heston, S., 1993, A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bonds and currency options, *The Review of Financial Studies* **6**, 327-343.

[10] Jackwerth, J., C., 2000, Recovering Risk Aversion from Option Prices and Realized Returns, *The Review of Financial Studies*, **13**, 433-451.

[11] Ziegler, A., 2007, Why Does Implied Risk Aversion Smile, *The Review of Financial Studies*, **20**, 859-904.

