

柏原聡氏 博士論文審査要旨

本論文のテーマは、確率解析の分野で90年代にその理論的枠組みが完成した後向確率微分方程式(Backward Stochastic Differential Equation)のファイナンスへの応用である。従来の前向確率微分方程式は、初期値を与えて前向きに(時間の経過方向に)解を求めていくのに対して、後向確率微分方程式は将来のある時点に終端条件が与えられ、後向きに(時間経過とは逆方向に)解が求められていく。そのような資産価格過程の例は、満期で額面の支払いがある債券価格や満期である所与のペイオフをもつオプション価格などである。これらの価格過程は、無裁定原理を課すと、ある線形の後向確率微分方程式に従うことがわかる。これらに対して、株価や為替、金利などの変動過程は、通常、前向確率微分方程式でモデル化される。そのため、債券価格やオプション価格を求めるというプライシングの問題は、前向確率微分方程式を組み合わせることで後向確率微分方程式を解くことと等価になる。その他に、後向確率微分方程式で記述されるものとしては、動的に変動する再帰的効用関数である確率微分効用(Stochastic Differential Utility)があり、近年、資産価格モデルや最適投資、最適消費問題で注目を集めている。

柏原氏の博士学位請求論文は、これらの諸問題に関連した3つの主要論文からなる第2章、第3章、第4章に序論の第1章と結論の第5章を加えた5つの章から構成される。以下、それぞれの理論的背景と研究成果の要約を行う。

第1章は、本研究の序論が記述される。

第2章は、ジャンプ付きの確率微分効用理論を研究する。最近、ファイナンスの資産価格モデルの実証でよく用いられるようになってきたEpstein and Zin(1989)の離散時間の再帰型効用関数を連続時間に拡張し一般化したDuffie and Epstein(1992)の確率微分効用理論では、リスク選好を測る効用関数自身が不確実に変動し、そのダイナミクスは後向確率微分方程式の枠組みで記述される。経済主体の選好が静的で時間加法的なvon Neumann-Morgenstern型の効用関数で構成される従来の資産価格モデルでは、主に、次の2つの難点が指摘されてきた。一つ目は、Mehra and Prescott(1985)のエクイティ・プレミアムパズルとして知られる実際の市場への当てはまりの悪さである。二つ目は、経済主体の行動がリスク回避からの帰結なのか、異時点間代替からの帰結なのか区別できないという問題点である。再帰的効用関数理論は、これらの点を克服する候補として提案されたものである。その結果、従来の静的で時間加法的な効用関数では考慮することのできない不確実性の解消するタイミングに関する選好をモデル化することが可能となったのである。第2章では、この確率微分効用に新たに予期しない不確実な変動を表すジャンプ項を付け加えた理論を研究している。ジャンプ付後向確率微分方程式の解の数学的性質と最適化に必要な比較定理の証明、確率微分効用に適用し導出される状態価格密度過程の特徴、確率微分効用の変動を規定する正規化された新たなアグリゲーター(将来の各時点での消費等の効用を測る経済主体の動的尺度を表し、それを全期間で集計すると効用となる関数)の可能性などが

考察される。

第3章は、生物学的なパターン形成や化学反応などで現れることが知られている反応拡散系 (reaction-diffusion system) のファイナンスへの応用を研究する。この章で取り扱う最適化問題は、第2章で証明されたジャンプ付の後向確率微分方程式で定式化された確率微分効用最大化問題の幾つかの結果を援用することで解かれ、最適取引戦略、最適消費の存在に関する必要十分条件が導出される。これらの最適解はある一組の連立準線形偏微分方程式で特徴付けられることが示され、更に、その連立準線形偏微分方程式を解く計算方法が提案される。ポートフォリオ選択問題の分野では、レジーム転換モデルが本モデルの類型であるが、そこでは従来型の静的効用関数を最大化する枠組みが採用されているのに対して、本モデルではより広いクラスの動的効用関数である確率微分効用関数を用いている点が新しい。また、従来のレジーム転換モデルはドリフトと拡散係数が同期したレジーム転換を仮定することが多いが、ここでは、異なる2つの独立なポアソン・ジャンプ過程で駆動される非同期型の確率過程に拡張したモデルを取り扱っている点で、より一般的、包括的といえる。ファイナンス分野でのその他の応用としては、信用格付けの離散的变化で価格変動する社債や、健康状態（離散的分類）の変化で支払い額が定められた保険契約等の最適取引戦略などが考えられる。

第4章は、非完備市場（ここでは、保険市場のように市場性のないリスクの存在する市場を仮定し、それらのリスクはブラウン運動やポアソン・ジャンプで表現されるとする）における条件付請求権の評価を、効用無差別価格付け (Utility Indifference Pricing) の考え方に基づき行う。効用無差別価格とは、条件付請求権を取引する場合の投資家の期待効用最大化により達成される価値関数と条件付請求権を取引しないでリスク資産のみで運用する場合の期待効用最大化により達成される価値関数が等しくなるという等価原理から導出される価格である。非完備市場の価格付けに、無裁定価格原理だけでは一意に定まらないところに、経済合理性を持ち込み、価格決定を行う方法といえる。この方法では、従来、ベルマン方程式やマルチンゲールアプローチなどの期待効用最大化問題を解く方法が用いられていたが、第3の方法として、後向確率微分方程式を用いた定式化を行うことができることがわかってきた。幾つかの先行研究 (Rouge and El Karoui(2000), Müller et al. (2005), Lim(2004, 2005)) とは異なった後向確率微分方程式で表現する方法を本論文では提示し、効用無差別価格の、最小マルチンゲール測度の下での期待値と確実性等価に分解された表現を導いている。具体的な数値計算では、ジャンプ過程のMalliavin 微分を適用して効率的に計算する例を提示している。

最後の第5章では、本論文の結果の総括と今後の課題が議論される。

以上のように、柏原論文に共通する新しい貢献は、後向確率微分方程式に関係する効用、投資、価格付けというファイナンスの代表的研究テーマで、予期しない不確実な変動を表すジャンプリスクの影響を明らかにし、それぞれ理論的成果を挙げている点にある。保険

業界で長く仕事をしてきた著者の問題意識の底流に、保険契約の価格付けや負債（責任準備金）評価など、非完備市場における価格付けを如何に行うかという問題が強くあったと思われる。特に、古くから等価効用原理としてアクチュアリー（保険数理士）に知られている概念に近い効用無差別価格は、まさに、その問題に答えたものである。これらの研究成果と実務への様々な含意を深く考察している本論文は、本研究科金融戦略・経営財務コースの目標を十分体現するものであり、高く評価される。最終口述試験の結果と併せ、審査員一同は、柏原氏の博士学位請求論文が、博士(経営)「金融戦略・経営財務Ph.D」の学位を与えるに十分値すると判断する。

最後に、今後の課題を幾つか列挙しておく。第2章の確率微分効用は有限の時間ホライズンの後向確率微分方程式に基づいていたが、その後、無限の時間ホライズンで境界条件が与えられた後向確率微分方程式の研究が、Hu and Schweizer(2009)でなされており、それを無限の時間ホライズンをもつ確率微分効用に応用することが考えられる。第3章では、反応拡散系の有限レジームの数値計算法を提案したが、この応用を著者が従事する保険業の現実の問題に材を取り、考察してみることが望まれる。第4章で提案された枠組みは、金利が決定論的な設定であったが、長期の問題では、確率的に変動する金利の影響が無視できなくなるため、確率金利への拡張も、今後、研究していくことが期待される。

以上、課題を幾つか述べたが、これらは本論文の水準および評価を損なうものではない。本論文で研究したテーマを更に発展させ、学会で発表するなり、学術雑誌に公表するなりして、研究を継続していくことを、審査員一同、切に願っている。