Markov Functional Interest Rate Modelの解明
モデルとキャリブレーション

村上秀記 (IM05F022)

Markov Functional Interest Rate Model

Hunt,Kennedy, and Pelsser(2000)

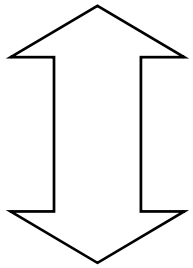
Balland and Hughston(2000)

Markov Functional Interest Rate Model

独特かつ抽象的

Markov Functional Interest Rate Model

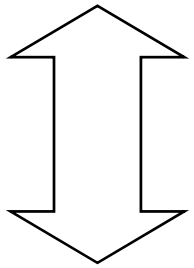
独特かつ抽象的



実戦的

Markov Functional Interest Rate Model

独特かつ抽象的

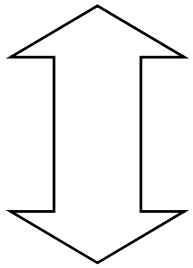


例えば、、、S.D.E.**がない！**

実戦的

Markov Functional Interest Rate Model

独特かつ抽象的



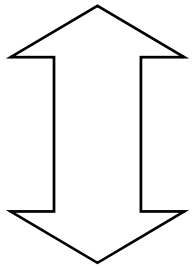
例えば、、、S.D.E.**がない！**

HJM**以上にフレームワーク的**

実戦的

Markov Functional Interest Rate Model

独特かつ抽象的



例えば、、、S.D.E.**がない！**

HJM**以上にフレームワーク的**

実戦的

オプションへのキャリブレーションが容易

価格計算が速い (**特に**Bermudan Option)

滑らかなヘッジ率 (Greek**s**)

どんなモデル（定義）？

エキゾティック金利デリバティブズQuant募集広告 (1)

Exotic Interest Rate Derivatives Quant

Entreprise:	**Orgtel Finance**
Lieu:	**Royaume-Uni-Londres**
Salaire:	**Negotiable**
Type de poste:	**Durée indéterminée**
Type de contrat:	**Plein temps**
Remise à jour:	10 Apr 2007
eFC Réf:	269696

Postuler à l'offre

A top tier US investment bank with an excellent reputation for derivatives research are growing their business in 2007 and are looking for an experienced exotic interest rate derivatives quant.

This group work on all the exotic interest rate modelling and pricing at this US bank. They have a reasonably sized team globally in London, New York and Tokyo and are keen to build on a successful 2006. They have a very nice system to work with so the infrastructure is taken care of. This means in terms of the modelling, there are a wide range of mathematically challenging projects to work on.

In terms of modelling the exotic rates you would be working on **Markov Functional**, BGM models with exposure to hybrid work.

エキゾティック金利デリバティブズQuant募集広告 (2)

AVP/VP Exotic Derivatives Quant for Tier 1 Derivatives House

Company:	**Orgtell Ltd**
Location:	**UK-London**
Remuneration:	**Negotiable**
Position Type:	**Employee**
Employment type:	**Full time**
Updated:	17 May 2007
eFC Ref no:	282561

Apply for Job

A top tier US investment bank with an excellent reputation for derivatives research are growing their business in 2007 and are looking for an Experienced Exotic Interest Rate Derivatives Quant to join their leading Fixed Income group.

They work on all exotic interest rate modelling covered by the bank as well as having the remit to cover hybrids. They have a respected team globally in London, New York and Tokyo with the majority of the new models built in London. They have excellent systems, with a dedicated Quant Development team. Thus the infrastructure is taken care of and the focus for the successful candidate would be on developing new models.

In terms of modelling exotics, you would be working on **Markov Functional**, BGM, HJM, CIR etc and will be exposed to cross asset modelling with FX, Credit and Commodities.

They are ideally looking for a mathematical PhD, DEA or equivalent from a respected program who has worked as a quant, modelling exotics at a leading financial institution. They need someone who is aware of the relevant issues within interest rates, but could consider candidates from alternative asset classes. The client is flexible on the level of experience, however you have to have an excellent understanding of stochastic calculus and probability theory as this is perhaps the most technical team in the market and are well known for their supreme mathematical ability. You need to have exposure to the standard interest rate models: BGM, HJM, **Markov Functional** and be very comfortable in implementing these models in C++.

This is an excellent opportunity to increase your exposure in exotic interest rate derivatives within a friendly environment and working with some of the most impressive and technically able **quants** in the market.

どんなモデル（定義）？と聞かれたら、、、

どんなモデル（定義）？と聞かれたら、、、

ある測度のもとでマルチンゲールな
低次元マルコフ過程

どんなモデル（定義）？と聞かれたら、、、

ある測度のもとでマルチンゲールな
低次元マルコフ過程

例えば、、、 $X_i = \int_0^{T_i} \sigma(s) dW_s$

どんなモデル（定義）？と聞かれたら、、、

ある測度のもとでマルチンゲールな
低次元マルコフ過程

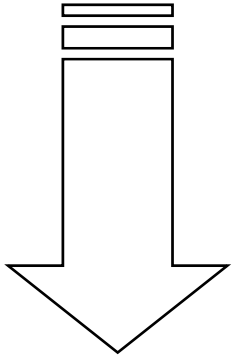
例えば、、、 $X_i = \int_0^{T_i} \sigma(s) dW_s$

（割引）債券価格をそのマルコフ過程の関数

$$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i)$$

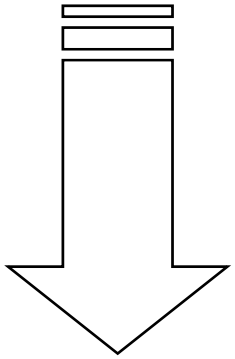
$$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i)$$

$$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i)$$



容易なキャリブレーション
早い価格計算
スムーズなグリーク

$$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i)$$



←ここの、実装のアルゴリズム
にこそ、このモデルの妙がある

容易なキャリブレーション
早い価格計算
スムーズなグリーク

研究の概要

⑴ 実装の詳細を解明

研究の概要

(1) 実装の詳細を解明

(2) Martingale Restrictionの検討

(3) Hull&Whiteモデルの再構成

新しい貢献

研究の概要

(1) 実装の詳細を解明

ノンパラメトリック

パラメトリック

(2) Martingale Restrictionの検討

(3) Hull&Whiteモデルの再構成

新しい貢献

研究の概要

(1) 実装の詳細を解明

(2) Martingale Restrictionの検討

(3) Hull&Whiteモデルの再構成

新しい貢献

研究の概要

(1) 実装の詳細を解明

各時点、各状態でイールドカーブを一本引くところまで記述

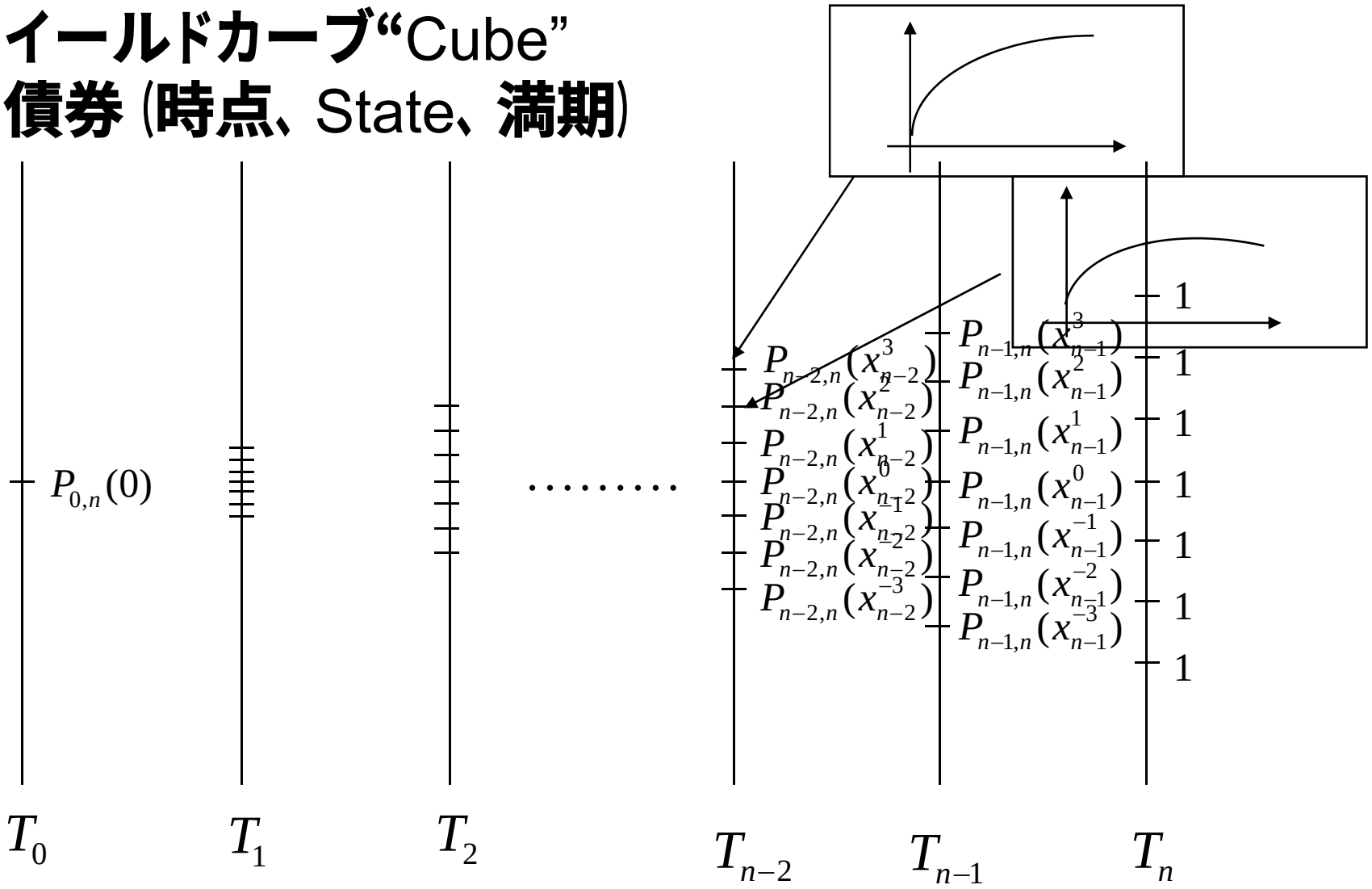
(2) Martingale Restrictionの検討

(3) Hull&Whiteモデルの再構成

新しい貢献

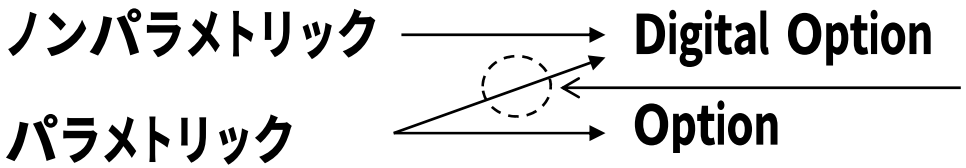
各時点、各状態でイールドカーブを引く、、、

イールドカーブ“Cube”
債券 (時点、State、満期)



研究の概要

(1) 実装の詳細を解明



各時点、各状態でイールドカーブを一本引くところまで記述

高速、かつ滑らかな数値積分法の導入、実装

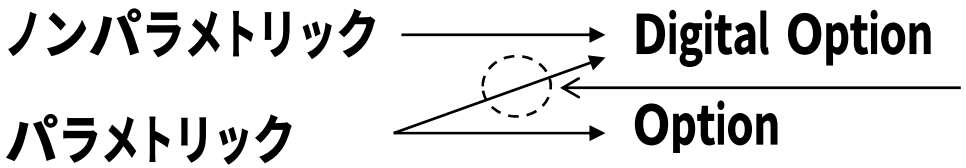
(2) Martingale Restrictionの検討

(3) Hull&Whiteモデルの再構成

新しい貢献

研究の概要

(1) 実装の詳細を解明



各時点、各状態でイールドカーブを一本引くところまで記述

高速、かつ滑らかな数値積分法の導入、実装

具体的な数値例を提示

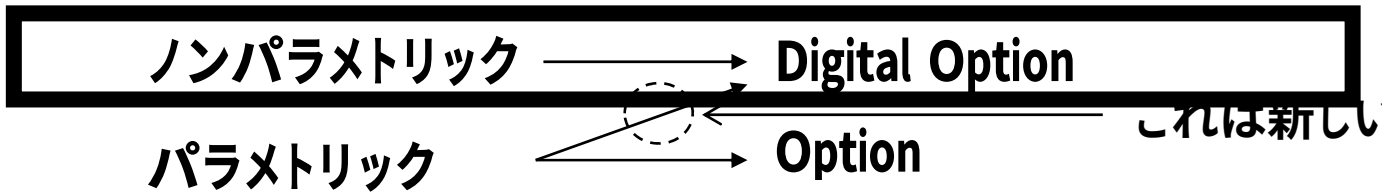
(2) Martingale Restrictionの検討

(3) Hull&Whiteモデルの再構成

新しい貢献

研究の概要

(1) 実装の詳細を解明



各時点、各状態でイールドカーブを一本引くところまで記述

高速、かつ滑らかな数値積分法の導入、実装

具体的な数値例を提示

(2) Martingale Restrictionの検討

(3) Hull&Whiteモデルの再構成

新しい貢献

ロードマップ

モデルの概要

- **本質的な所**

- **数理**

- **具体例**　Libor Markov Functional Model

キャリブレーション

- Non Parametric**なアプローチ**

ロードマップ

モデルの概要

- **本質的な所**
- **数理**
- **具体例** Libor Markov Functional Model

相変わらずしばらく抽象的な話が続く、、、

キャリブレーション

- Non Parametric**なアプローチ**

ロードマップ

モデルの概要

- **本質的な所**

  - **数理**

  - **具体例**　Libor Markov Functional Model

キャリブレーション

  - Non Parametric**なアプローチ**

モデルの概要　－　本質的な所

債券価格を直接モデリング

マルコフ過程の関数とする

マルコフ過程：　$X_i = \int_0^{T_i} \sigma(s) dW_s$

債券価格：　$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i)$

$P_{i,j}(\cdot)$**は関数**

モデルの概要　ー　本質的な所

$$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i)$$　← **たったこれだけ、、、？**

モデルの概要　－　本質的な所

$$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i)$$　← たったこれだけ、、、？

なのに（だから？）、、、

金利オプションへのCalibrationが容易で、

計算が非常に高速にできて、

滑らかなGreeks（デルタ、ガンマ等々）をもたらす。

How？

モデルの概要　ー　本質的な所

$$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i)$$

何が新しい？

モデルの概要　－　本質的な所

$$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i)$$　　**何が新しい？**

$$P_{i,j} = E\left[e^{-\int_{T_i}^{T_j} r(s)ds} \middle| \Im_i \right]$$

$$r(t) \longrightarrow P_{i,j}$$

モデルの概要　－　本質的な所

$$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i)$$　　**何が新しい？**

$$P_{i,j} = E\left[e^{-\int_{T_i}^{T_j} r(s)ds} \middle| \Im_i \right]$$

$$r(t) \longrightarrow P_{i,j}$$

Affine**系なら**

$$P_{i,j} = e^{A(T_i,T_j)-B(T_i,T_j)r(T_i)}$$

モデルの概要　－　本質的な所

$$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i)$$　　**何が新しい？**

$$P_{i,j} = E\left[e^{-\int_{T_i}^{T_j} r(s)ds} \middle| \Im_i \right]$$　　$$-\frac{\partial}{\partial T_j} \ln P_{i,j} = f(T_i, T_j)$$

$$r(t) \longrightarrow P_{i,j} \rightleftarrows f(t,T)$$

Affine**系なら**

$$P_{i,j} = e^{A(T_i,T_j) - B(T_i,T_j) r(T_i)}$$　　$$P_{i,j} = e^{-\int_{T_i}^{T_j} f(T_i,s)ds}$$

モデルの概要　－　本質的な所

$$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i)$$　　**何が新しい？**

$$P_{i,j} = E\left[e^{-\int_{T_i}^{T_j} r(s)ds} \middle| \Im_i \right]$$　　$$-\frac{\partial}{\partial T_j} \ln P_{i,j} = f(T_i, T_j)$$

$$r(t) \longrightarrow P_{i,j} \rightleftarrows f(t,T)$$

Affine**系なら**

$$P_{i,j} = e^{A(T_i,T_j) - B(T_i,T_j) r(T_i)}$$

$$P_{i,j} = e^{-\int_{T_i}^{T_j} f(T_i,s)ds}$$

$\sigma(t,T) = \alpha(t)\beta(T)$**なら**Markovian

モデルの概要　－　本質的な所

$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i)$　　**何が新しい？**

今までのMarkovian Term Structure Model

$$X_i \longrightarrow P_{i,j}(X_i)$$

Markov Functional Interest Rate Model

$$X_i \xrightarrow{P_{i,j}(\cdot)} P_{i,j}$$

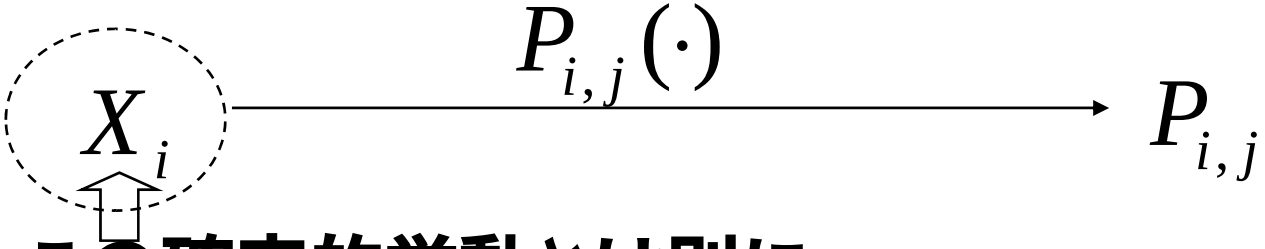
モデルの概要　－　本質的な所

$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i)$　　**何が新しい？**

今までのMarkovian Term Structure Model

$$X_i \longrightarrow P_{i,j}(X_i)$$

Markov Functional Interest Rate Model



この確率的挙動とは別に、、、

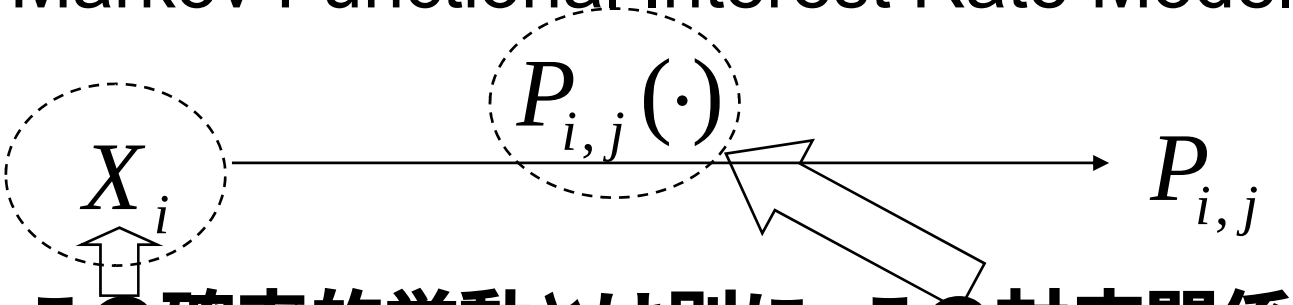
モデルの概要　－　本質的な所

$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i)$　　**何が新しい？**

今までのMarkovian Term Structure Model

$X_i \longrightarrow P_{i,j}(X_i)$

Markov Functional Interest Rate Model



この確率的挙動とは別に、この対応関係も決めれる

モデルの概要　－　本質的な所

$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i)$　　何が新しい？

今までのMarko

X_i

このDecouplingによる関数を決めれる自由度がキャリブレーションを容易にして、かつ高速な計算を可能にしている　How？

Markov Functional Interest Rate Model

この確率的挙動とは別に、この対応関係も決めれる

モデルの概要　ー　本質的な所

ポイントは $P_{i,j}(\cdot)$ をどう定めるか（使うか？）

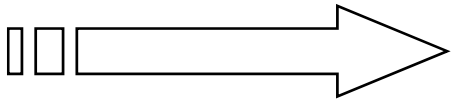
モデルの概要　ー　本質的な所

ポイントは $P_{i,j}(\cdot)$ **をどう定めるか（使うか？）**

⇒ Calibration!!

モデルの概要　－　本質的な所

ポイントは $P_{i,j}(\cdot)$ **をどう定めるか（使うか？）**



Calibration!!

How?

ロードマップ

モデルの概要

- **本質的な所**

- **数理**

- **具体例**　Libor Markov Functional Model

キャリブレーション

- Non Parametric**なアプローチ**

モデルの概要　－　数理

ニューメレルで割ったものを考える、、、

$$\frac{P_{i,j}}{P_{i,n}} \quad (i < j < n)$$

$P_{i,j}$: T_i時点で観察されるT_j時点の割引債

$P_{i,n}$: T_i時点で観察される(最長満期)T_n時点の割引債

＝ニューメレール

モデルの概要　－　数理

マルチンゲールプライシングから

$$\frac{P_{i,j}}{P_{i,n}} = E^{Q_n}\left[\frac{P_{j,j}}{P_{j,n}}\middle|\Im_i\right] \qquad (i < j < n)$$

モデルの概要　－　数理

マルチンゲールプライシングから

債券の性質

$$\frac{P_{i,j}}{P_{i,n}} = E^{Q_n}\left[\left.\frac{P_{j,j}}{P_{j,n}}\right|\Im_i\right] = E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{j,n}}\right|\Im_i\right] \quad (i < j < n)$$

モデルの概要　－　数理

マルチンゲールプライシングから

債券の性質

$$\frac{P_{i,j}}{P_{i,n}} = E^{Q_n}\left[\frac{P_{j,j}}{P_{j,n}}\middle|\Im_i\right] = E^{Q_n}\left[\frac{1}{P_{j,n}}\middle|\Im_i\right] \quad (i<j<n)$$

モデルの仮定から

マルコフ性

$$\frac{P_{i,j}}{P_{i,n}(X_i)} = E^{Q_n}\left[\frac{1}{P_{j,n}(X_i)}\middle|X_i\right]$$

ニューメレールがX_iの関数

モデルの概要　－　数理

マルチンゲールプライシングから

債券の性質

$$\frac{P_{i,j}}{P_{i,n}} = E^{Q_n}\left[\left.\frac{P_{j,j}}{P_{j,n}}\right|\Im_i\right] = E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{j,n}}\right|\Im_i\right] \quad (i < j < n)$$

モデルの仮定から

$$\frac{P_{i,j}}{P_{i,n}(X_i)} = E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{j,n}(X_i)}\right|X_i\right]$$

$$P_{i,j} = P_{i,n}(X_i) \times E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{j,n}(X_i)}\right|X_i\right]$$

ニューメレールの関数がわかると他の一般の満期の債券もわかる

↓

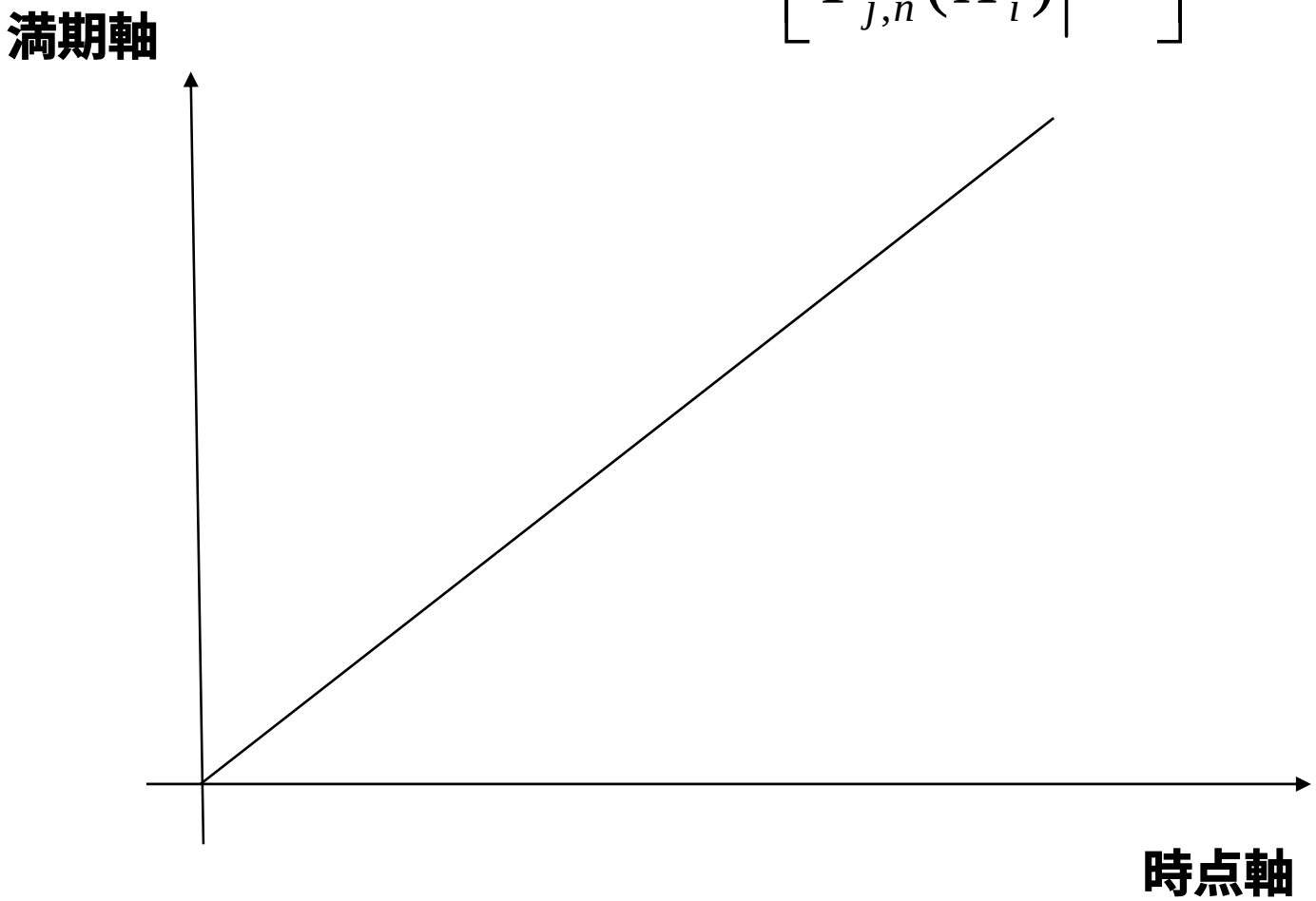
イールドカーブが引ける

モデルの概要　ー　数理

$$P_{i,j} = P_{i,n}(X_i) \times E^{Q_n}\left[\frac{1}{P_{j,n}(X_i)} \middle| X_i \right]$$

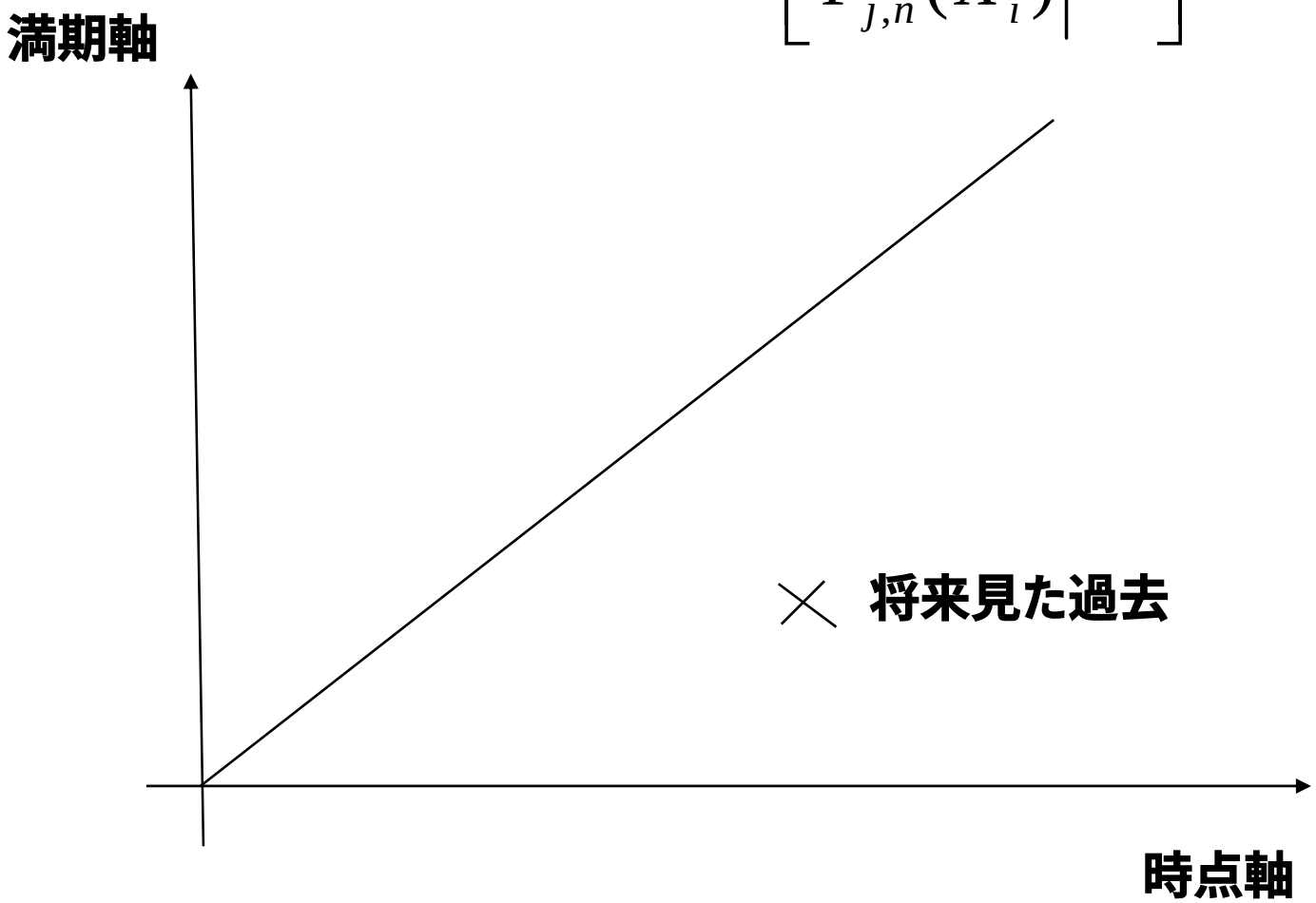
モデルの概要　－　数理

$$P_{i,j} = P_{i,n}(X_i) \times E^{Q_n}\left[\frac{1}{P_{j,n}(X_i)} \middle| X_i \right]$$



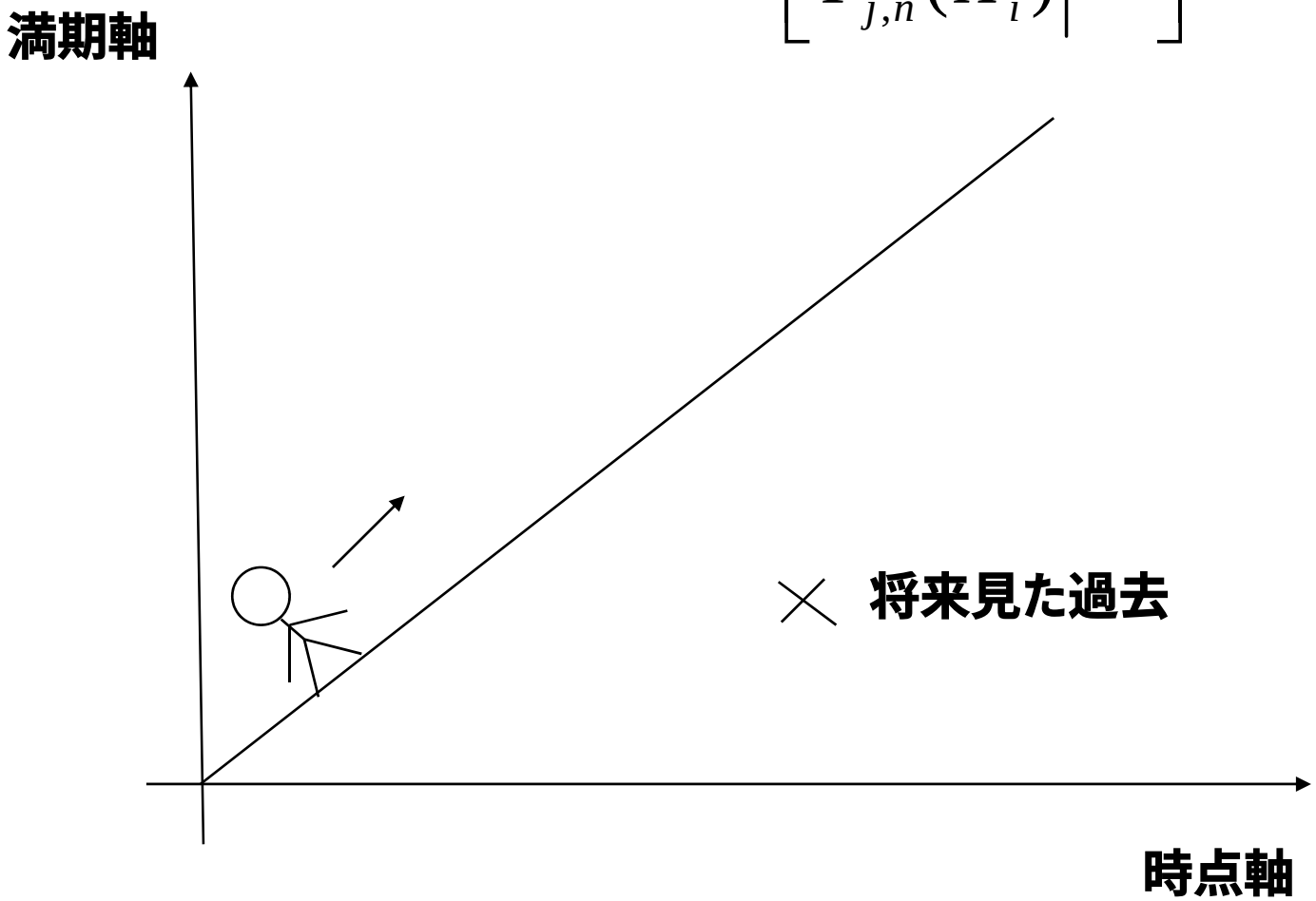
モデルの概要　－　数理

$$P_{i,j} = P_{i,n}(X_i) \times E^{Q_n}\left[\frac{1}{P_{j,n}(X_i)} \middle| X_i \right]$$



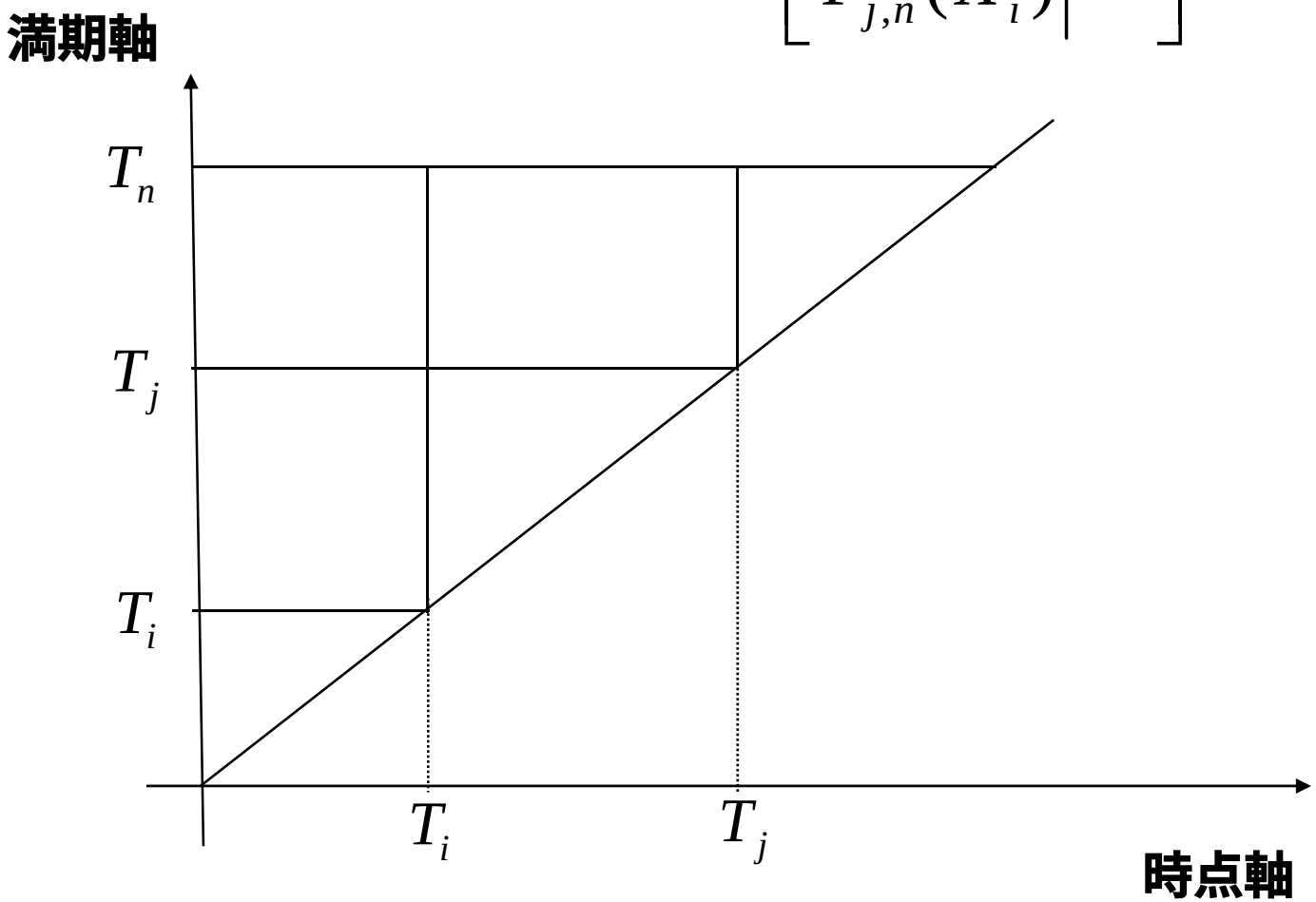
モデルの概要　－　数理

$$P_{i,j} = P_{i,n}(X_i) \times E^{Q_n}\left[\frac{1}{P_{j,n}(X_i)} \middle| X_i \right]$$



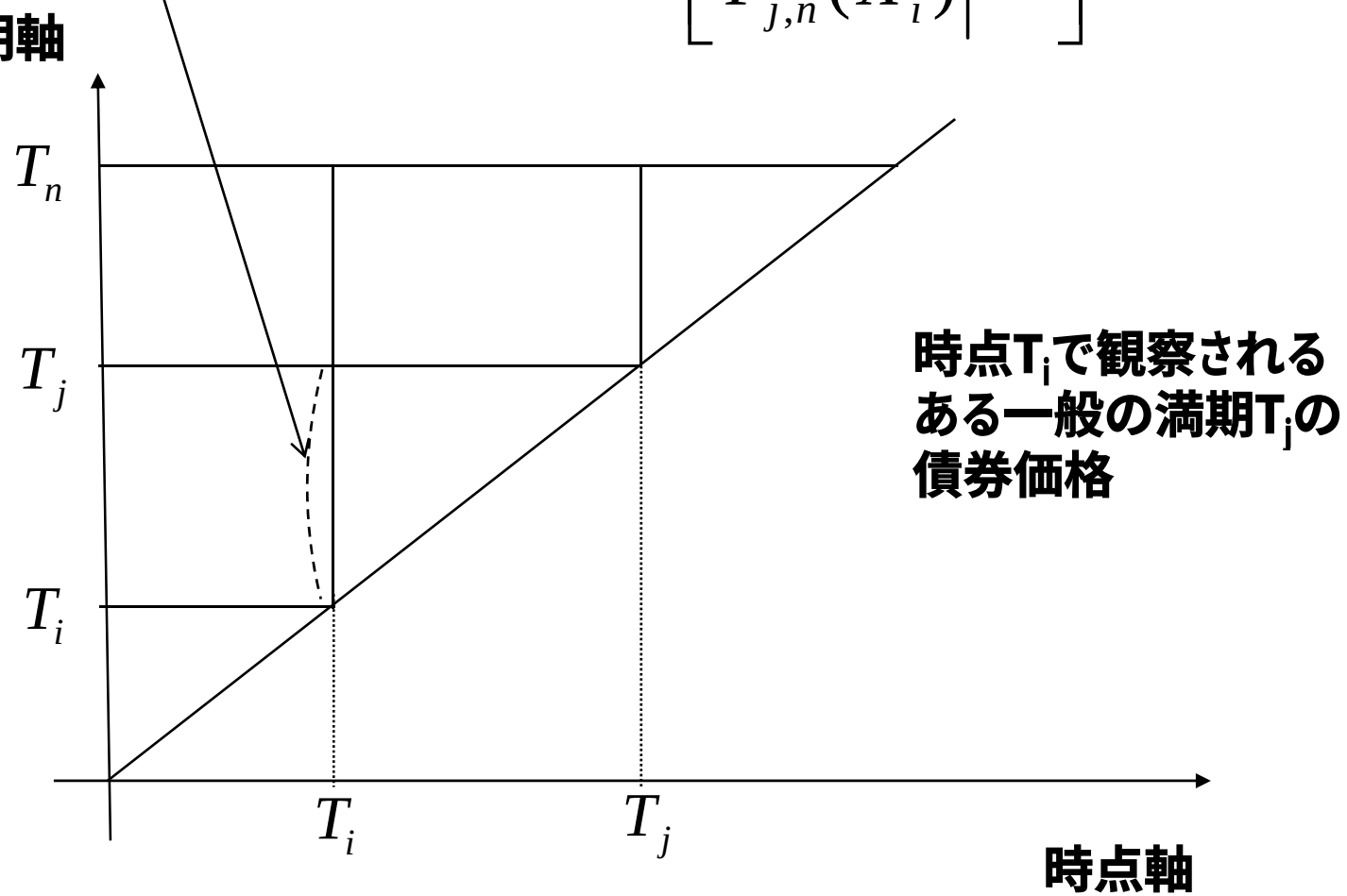
モデルの概要　－　数理

$$P_{i,j} = P_{i,n}(X_i) \times E^{Q_n}\left[\left. \frac{1}{P_{j,n}(X_i)} \right| X_i \right]$$



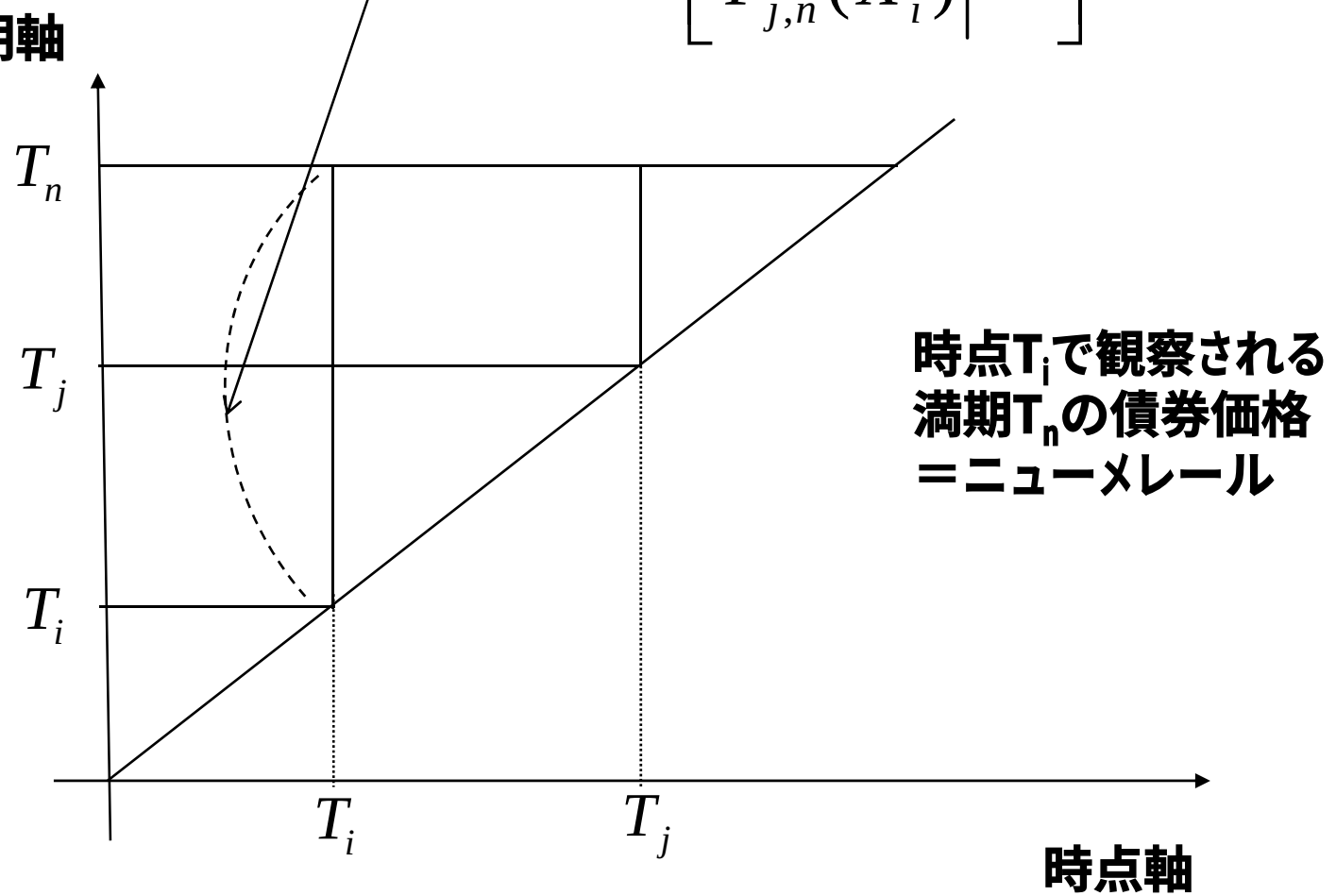
モデルの概要　－　数理

$$P_{i,j} = P_{i,n}(X_i) \times E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{j,n}(X_i)}\right| X_i\right]$$



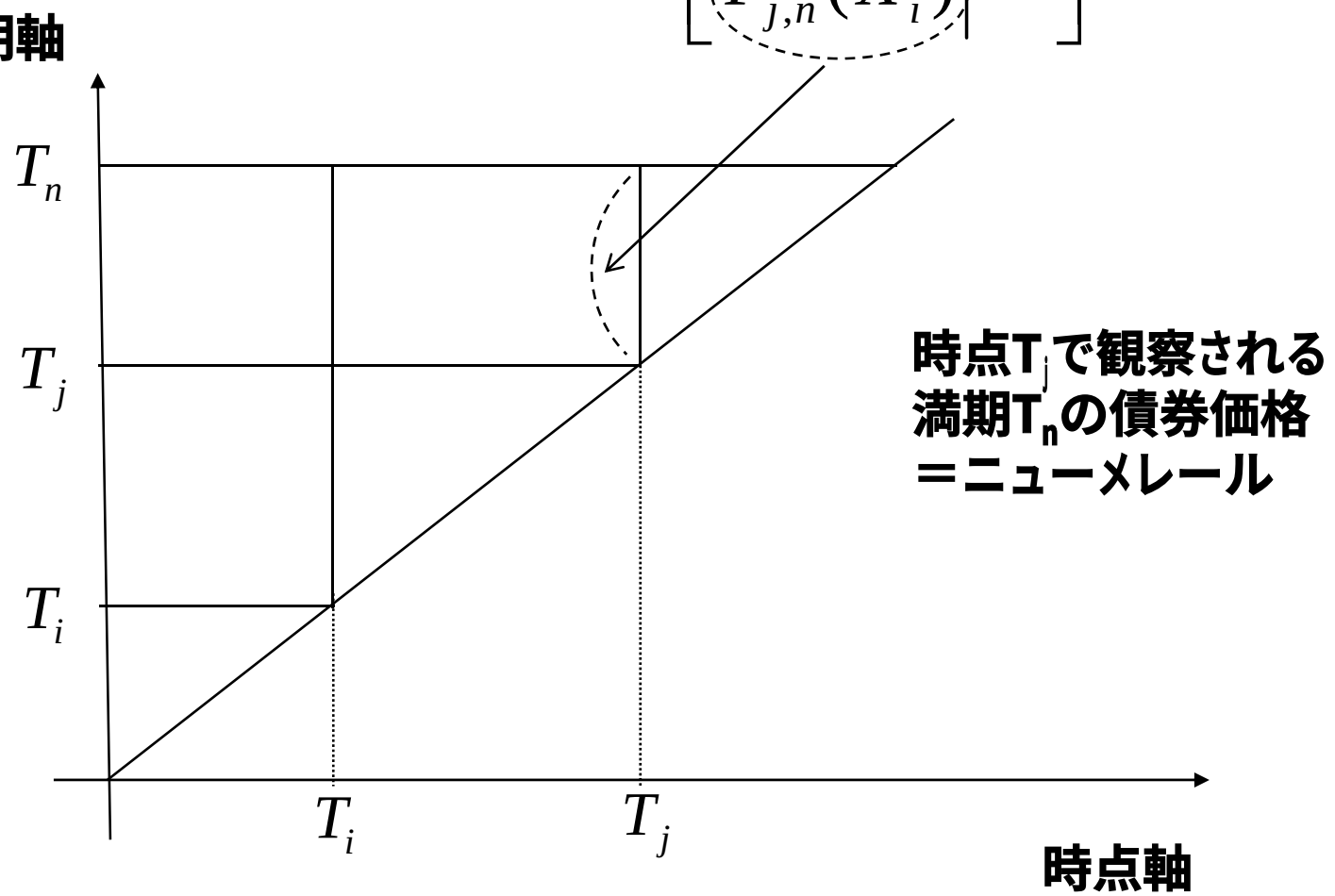
モデルの概要　－　数理

$$P_{i,j} = P_{i,n}(X_i) \times E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{j,n}(X_i)}\right| X_i\right]$$



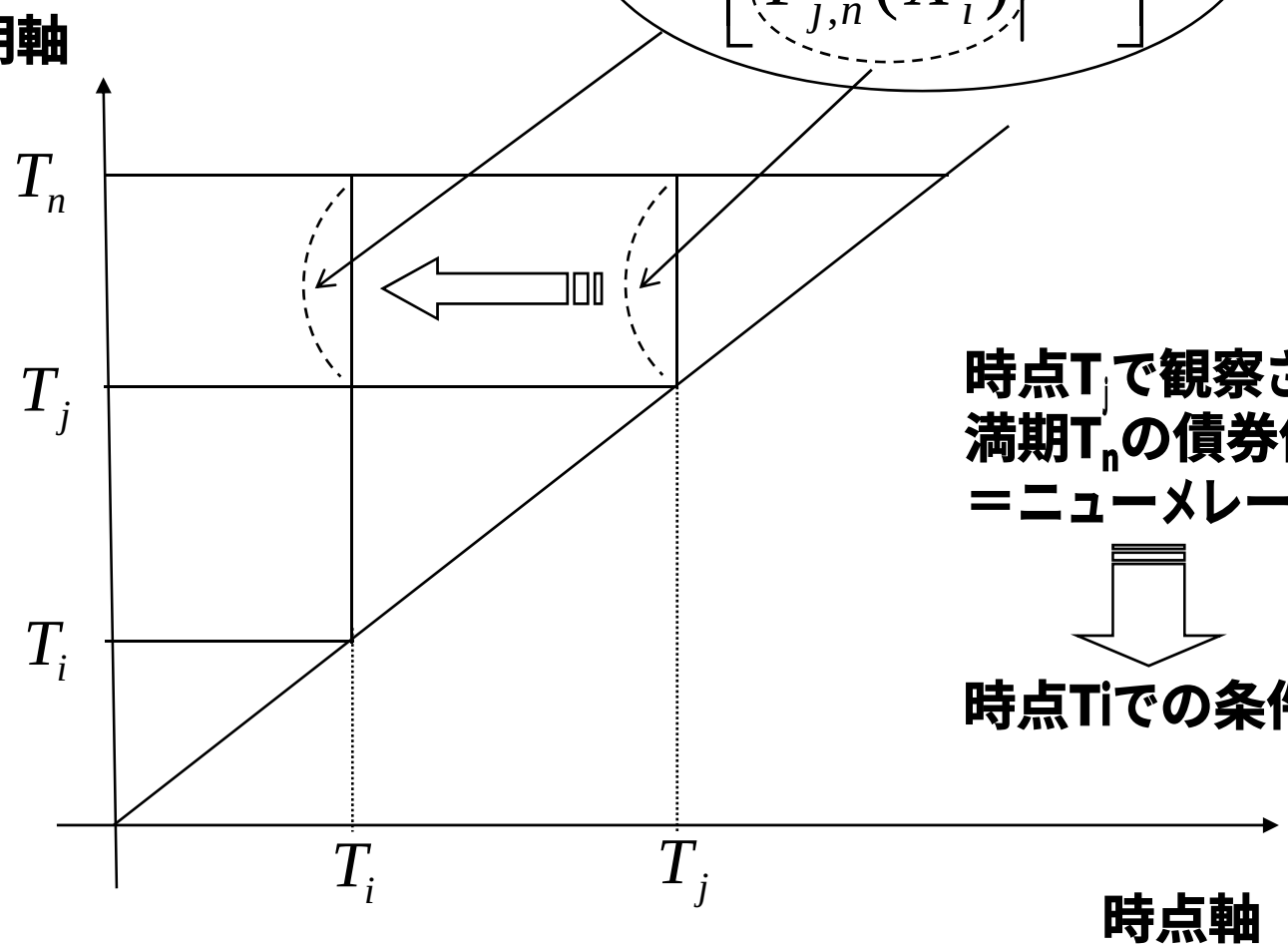
モデルの概要　－　数理

$$P_{i,j} = P_{i,n}(X_i) \times E^{Q_n}\left[\frac{1}{P_{j,n}(X_i)} \middle| X_i \right]$$



モデルの概要　－　数理

$$P_{i,j} = P_{i,n}(X_i) \times E^{Q_n}\left[\frac{1}{P_{j,n}(X_i)} \middle| X_i \right]$$

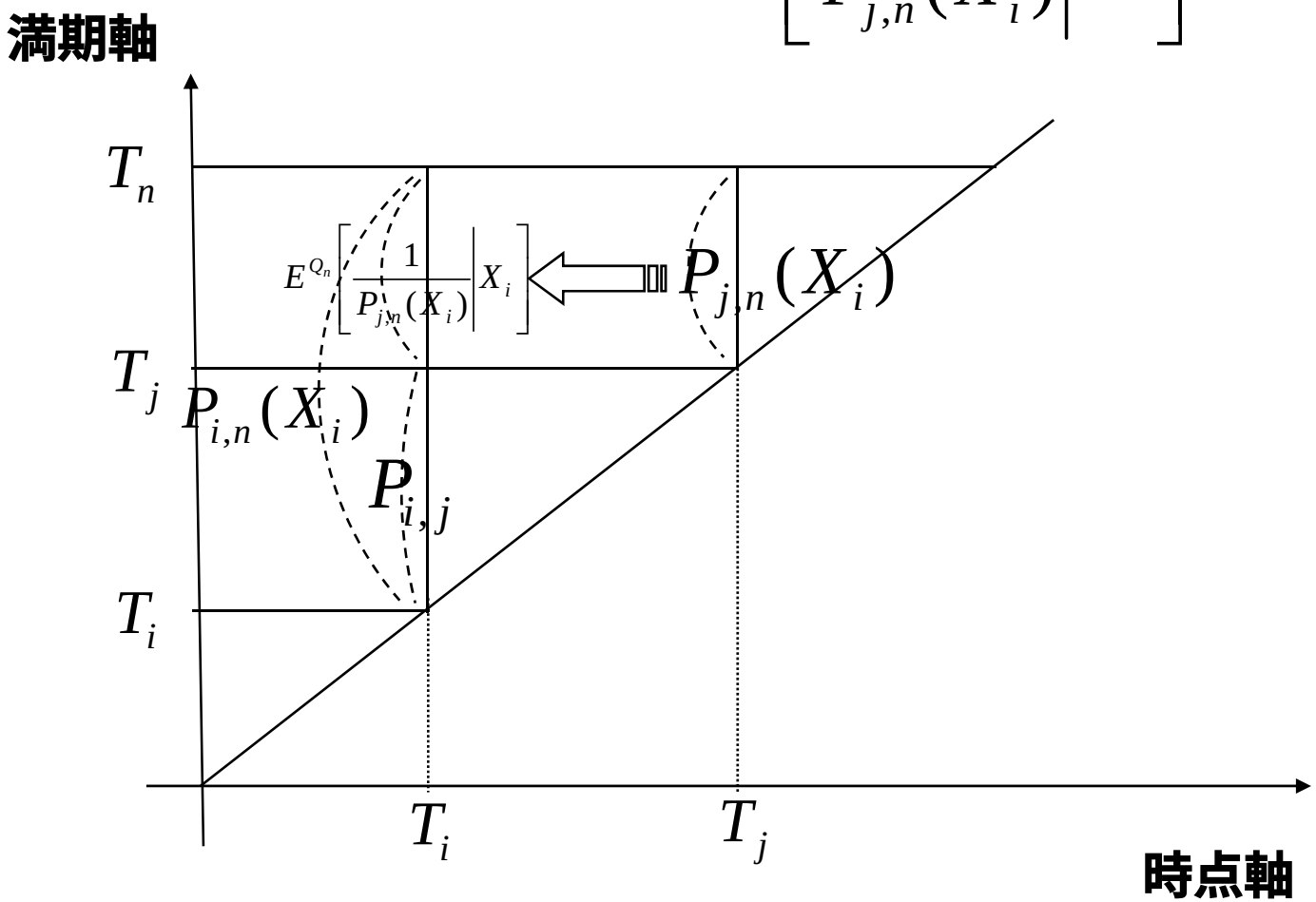


時点T_jで観察される
満期T_nの債券価格
＝ニューメレール

時点Tiでの条件付期待値

モデルの概要　－　数理（おわり）

$$P_{i,j} = P_{i,n}(X_i) \times E^{Q_n}\left[\frac{1}{P_{j,n}(X_i)} \middle| X_i \right]$$



ロードマップ

モデルの概要

- 本質的な所

- 数理

- 具体例　Libor Markov Functional Model

キャリブレーション

- Non Parametricなアプローチ

モデルの概要　ー　具体例

モデル自体はフレームワーク

関数をどう決めるか？ ⇒ 指針：キャリブレーション

何にキャリブレートするか？　⇒　具体例

モデルの概要　－　具体例

モデル自体はフレームワーク

関数をどう決めるか？ ⇒ 指針：キャリブレーション

何にキャリブレートするか？　⇒　具体例

Libor Markov Functional Model
Swap Markov Functional Model

モデルの概要　－　具体例

モデル自体はフレームワーク

関数をどう決めるか？ ⇒ 指針：キャリブレーション

何にキャリブレートするか？　⇒　具体例

Libor Markov Functional Model

Swap Markov Functional Model

モデルの概要　－　具体例

モデル自体はフレームワーク

関数をどう決めるか？ ⇒ 指針：キャリブレーション

何にキャリブレートするか？　⇒　具体例

Libor Markov Functional Model

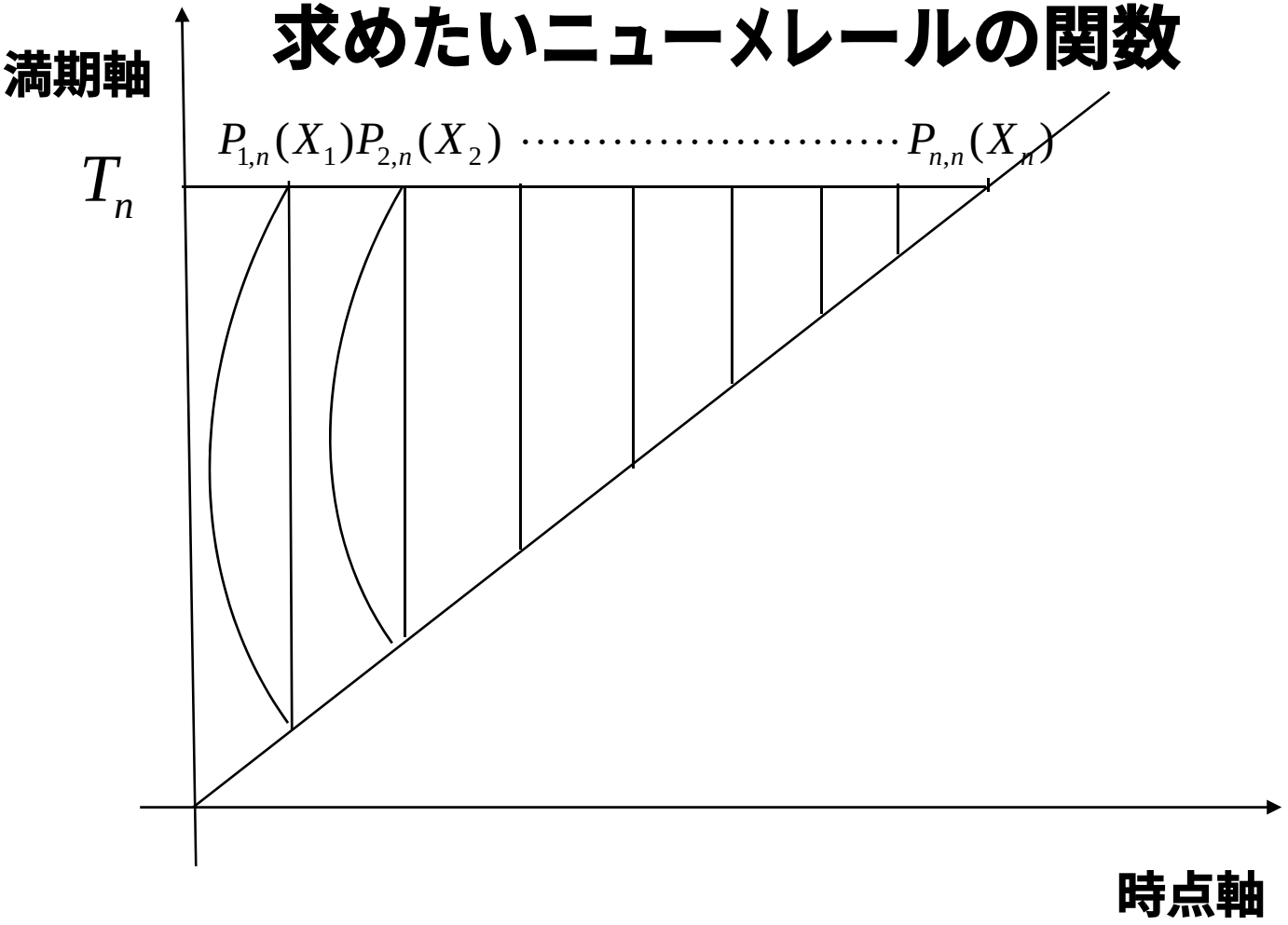
Swap Markov Functional Model

$$P_{i,j} = P_{i,n}(X_i) \times E^{Q_n}\left[\frac{1}{P_{j,n}(X_i)}\middle| X_i\right]$$

ここにうまくLiborを導入する

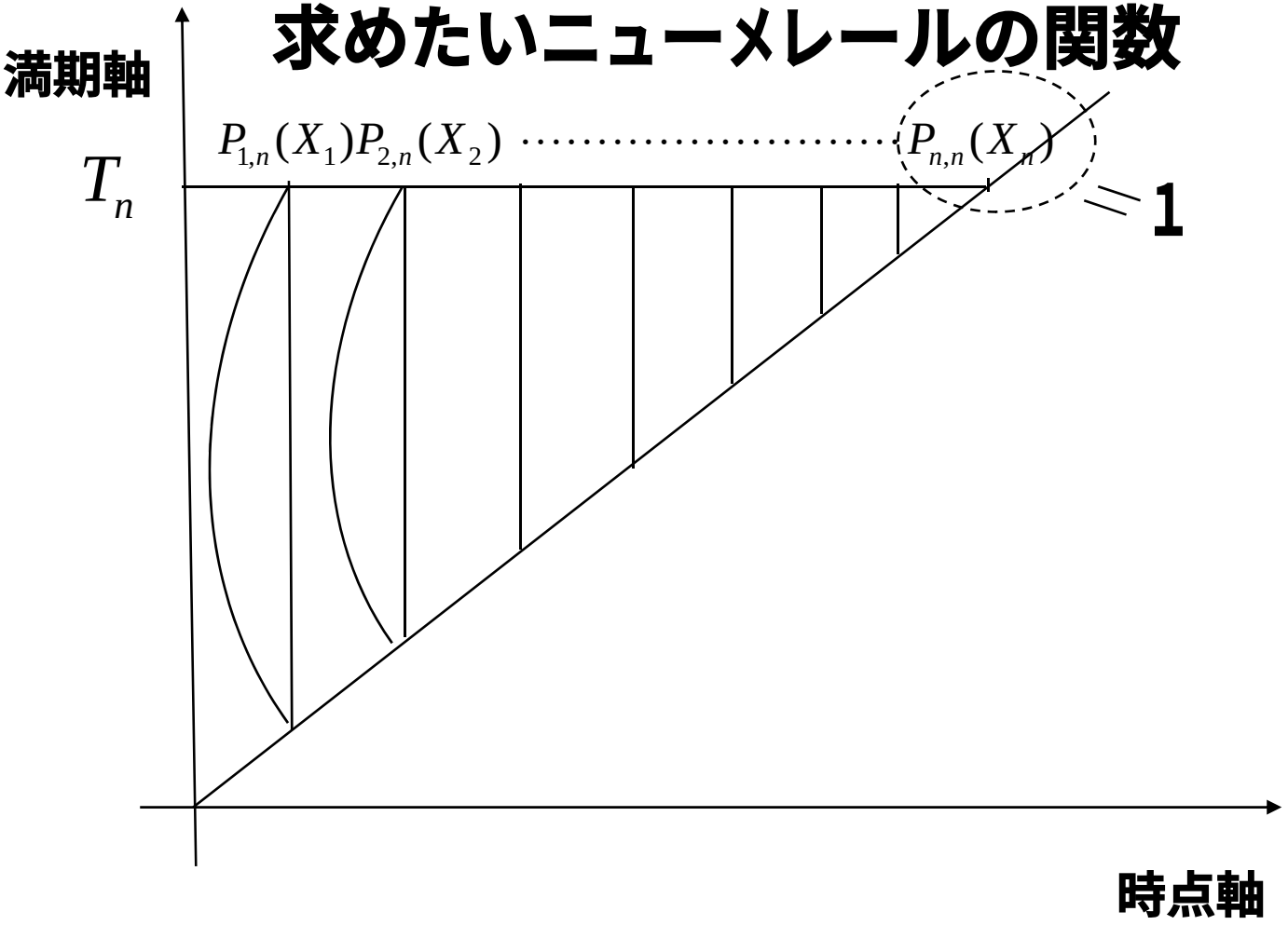
モデルの概要 － 具体例

Libor Markov Functional Model



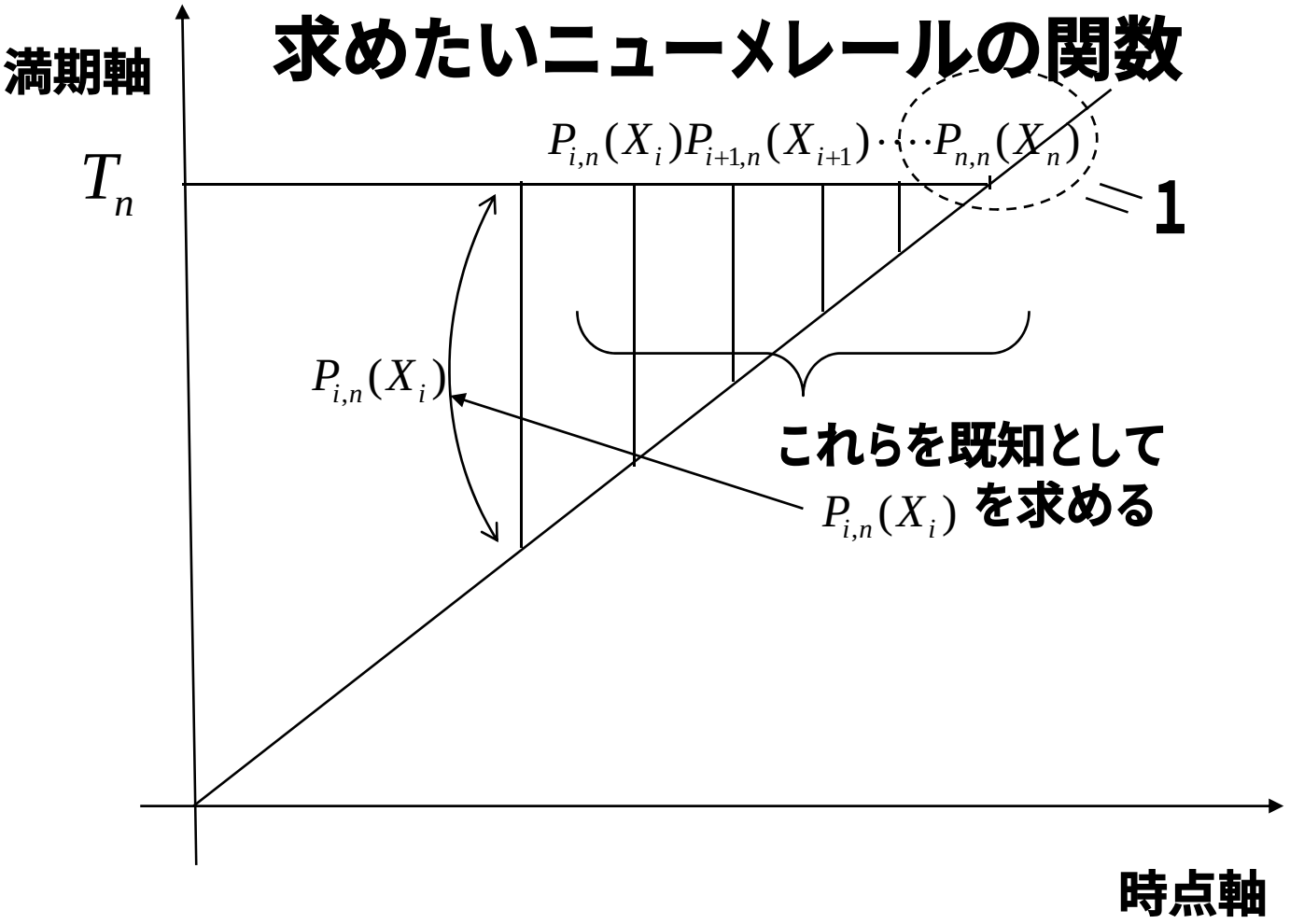
モデルの概要 － 具体例

Libor Markov Functional Model



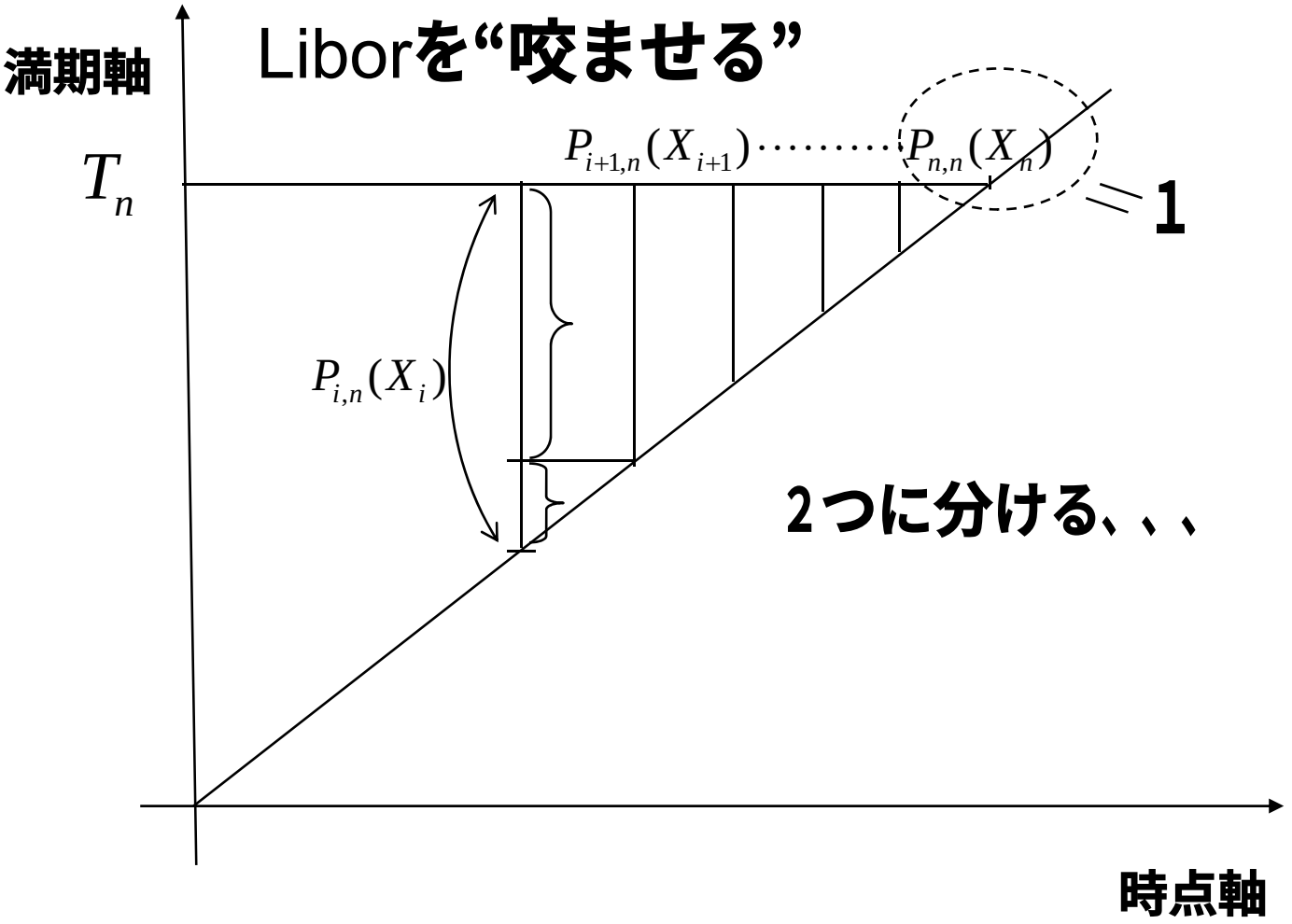
モデルの概要　－　具体例

Libor Markov Functional Model



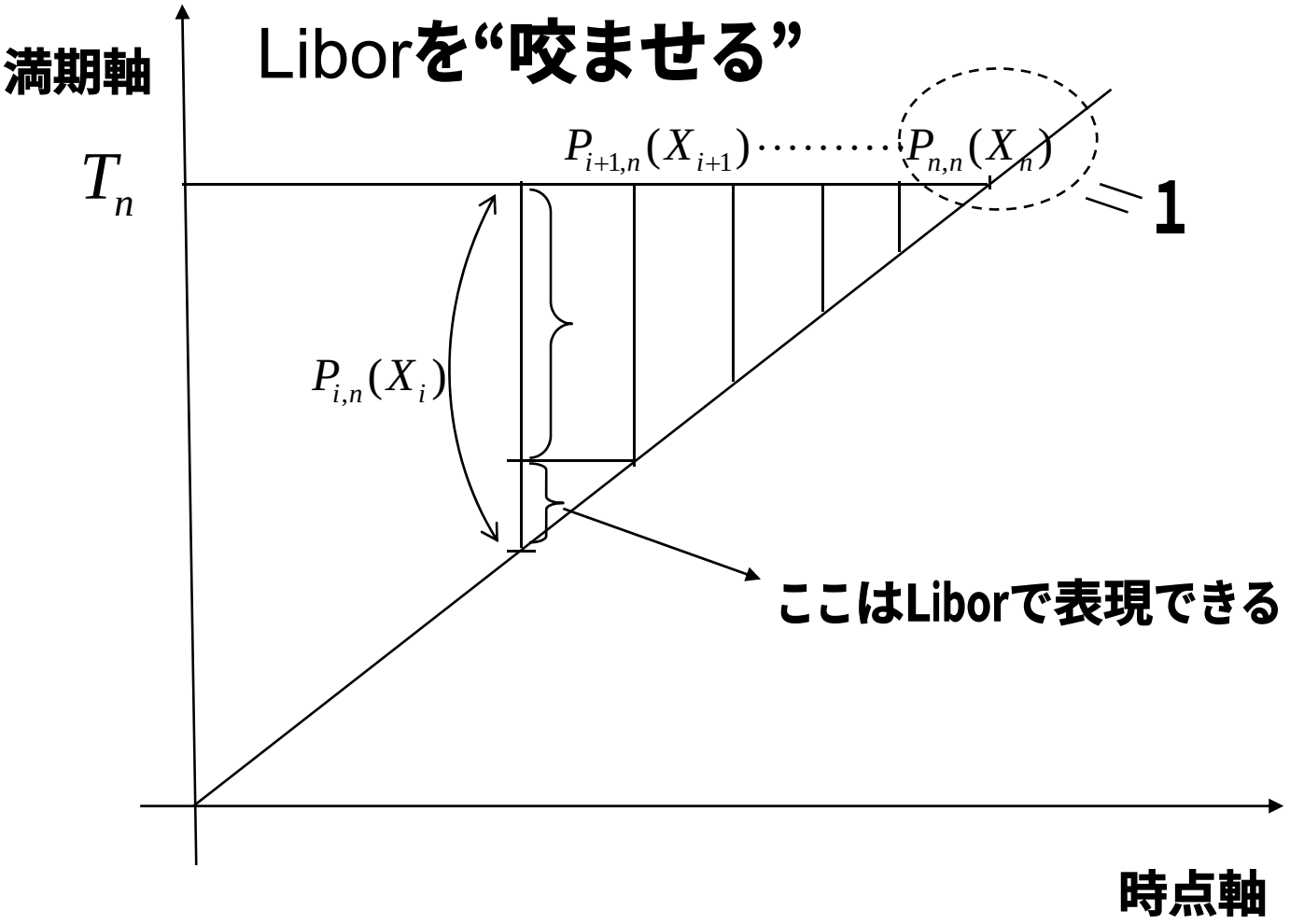
モデルの概要　－　具体例

Libor Markov Functional Model



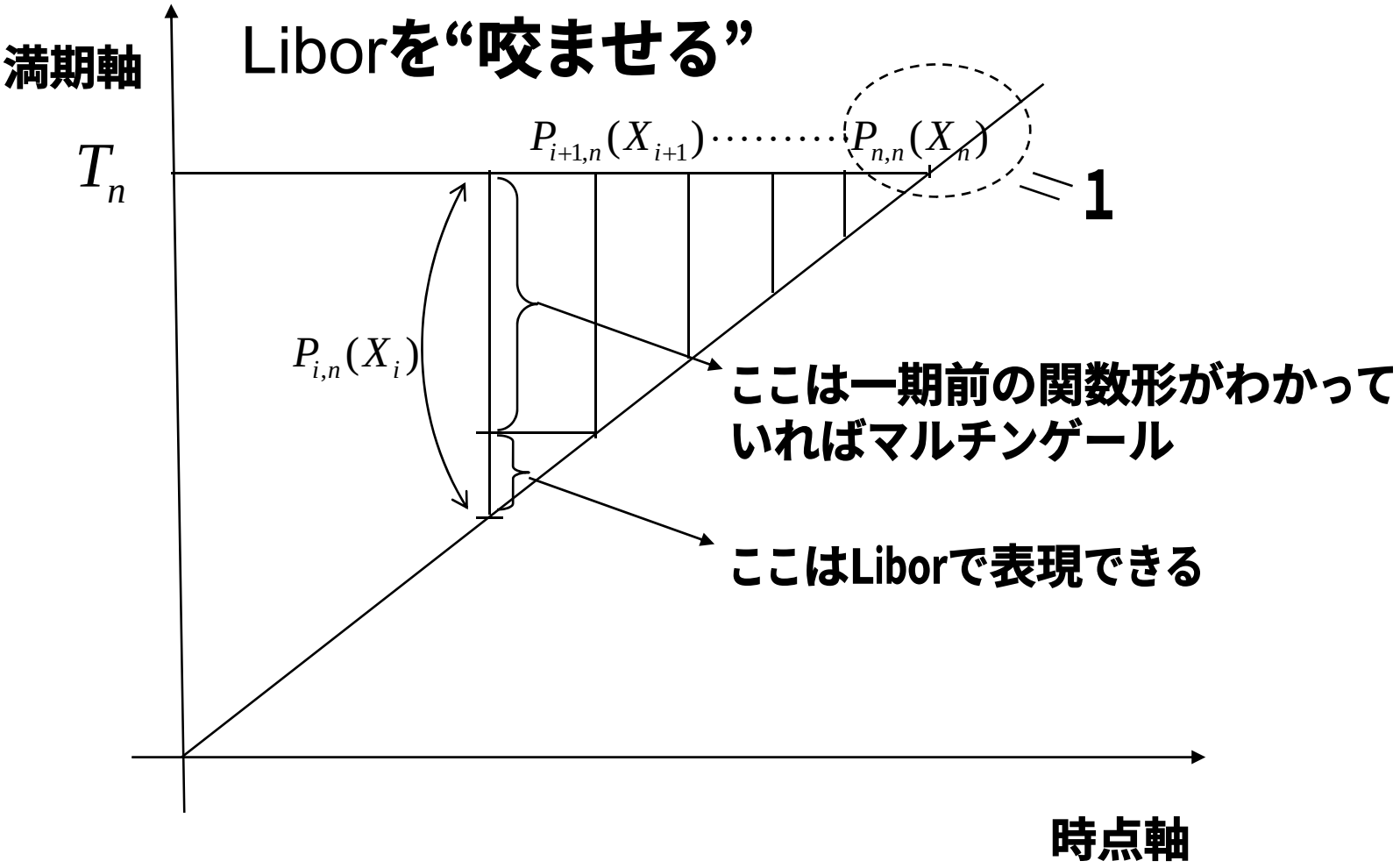
モデルの概要　－　具体例

Libor Markov Functional Model



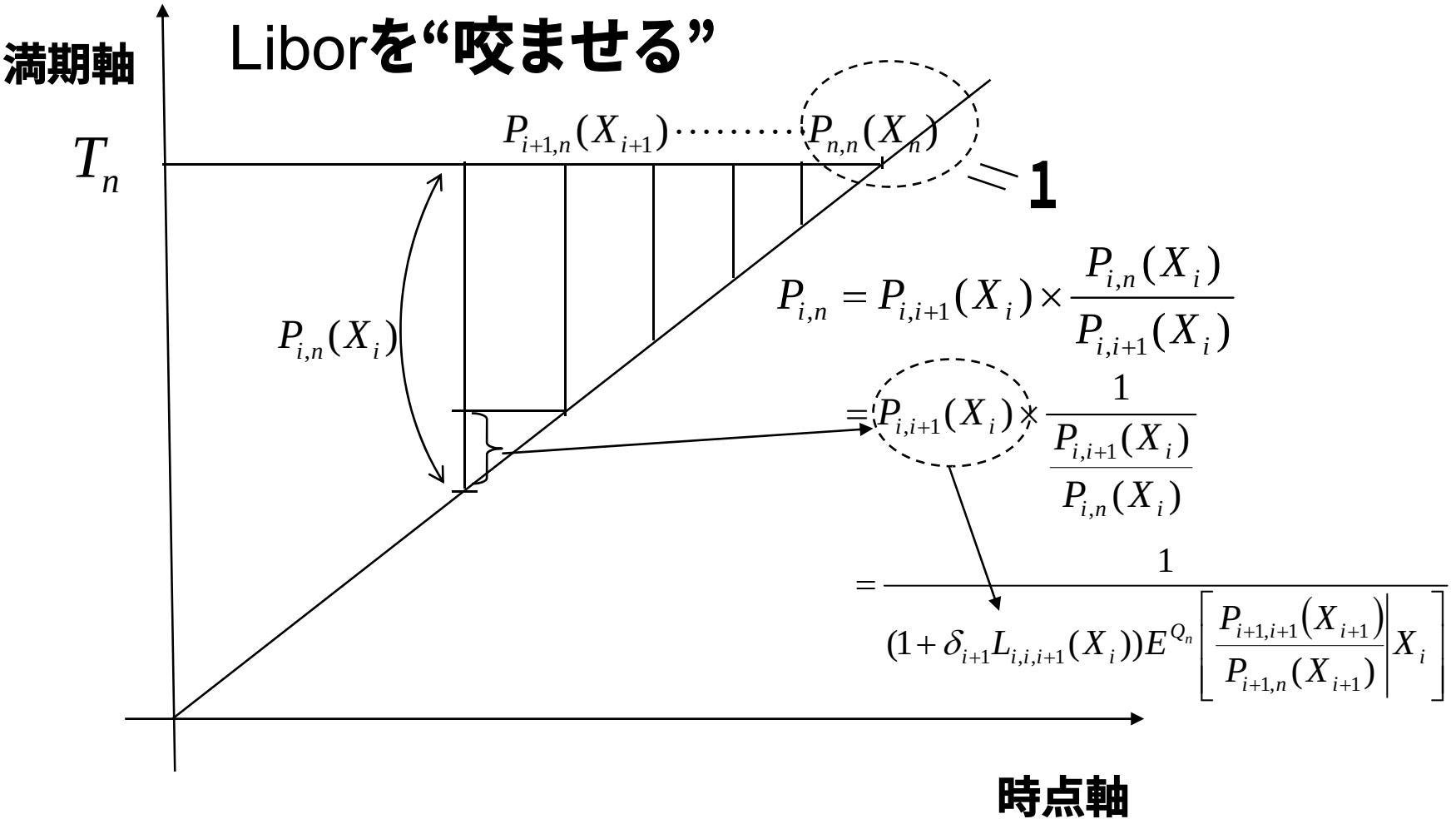
モデルの概要　－　具体例

Libor Markov Functional Model



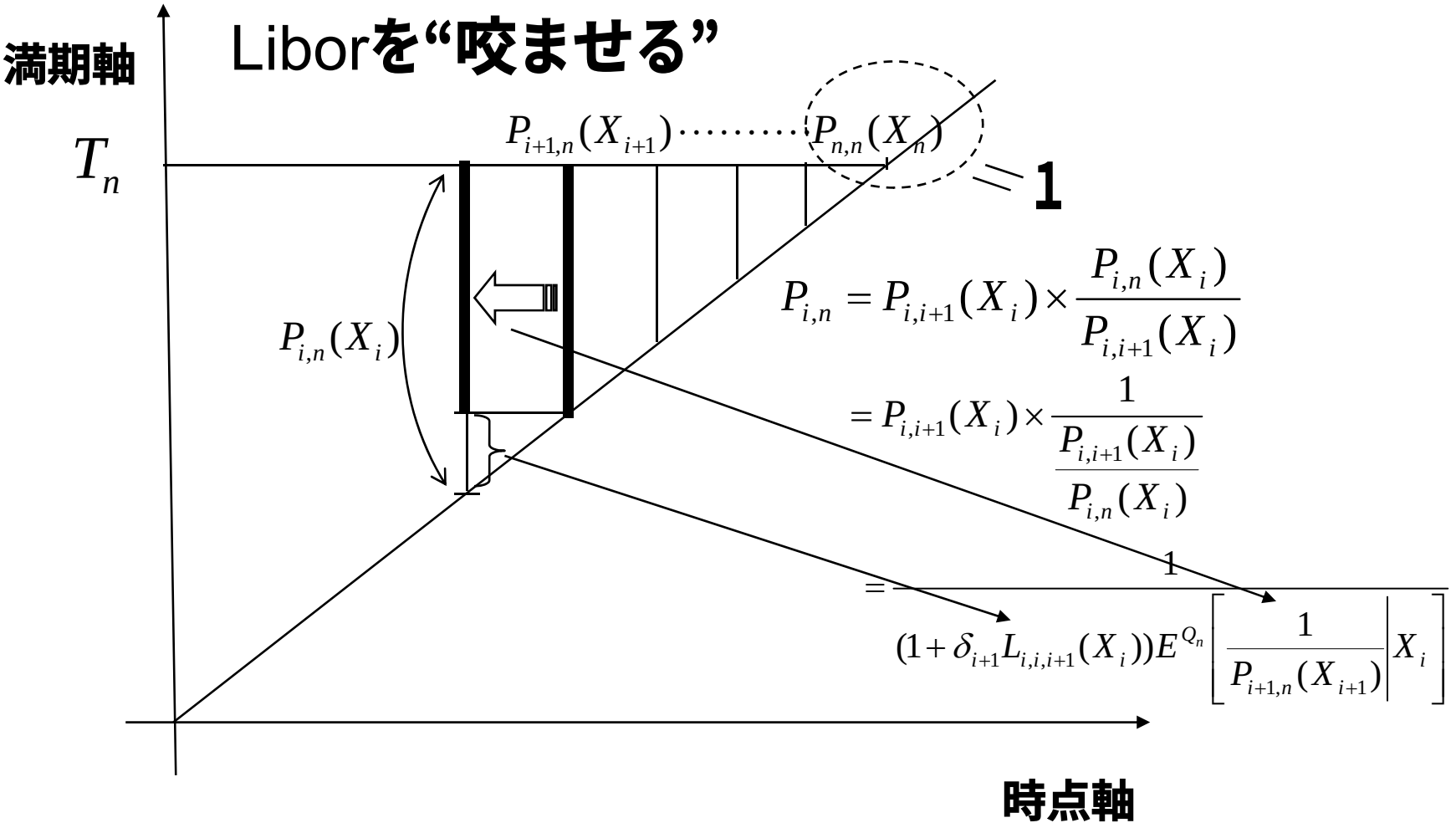
モデルの概要　－　具体例

Libor Markov Functional Model



モデルの概要　－　具体例

Libor Markov Functional Model



モデルの概要　ー　具体例

Libor Markov Functional Model　ー　まとめ

ニューメレールの関数形

$$P_{i,n} = P_{i,n}(X_i) = \frac{1}{(1+\delta_{i+1}L_{i,i,i+1}(X_i))E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{i+1,n}(X_{i+1})}\right| X_i\right]}$$

LiborがX_iの単調増加関数であると仮定

これもX_iの関数であることに注意

これらの関数を内生的に求める

モデルの概要　ー　具体例

Libor Markov Functional Model　ー　まとめ

ニューメレールの関数形

前の期のニューメレール
＝Liborの関数

$$P_{i,n} = P_{i,n}(X_i) = \frac{1}{(1+\delta_{i+1}L_{i,i,i+1}(X_i))E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{i+1,n}(X_{i+1})}\right| X_i\right]}$$

LiborがX_iの単調増加関数であると仮定

これもX_iの関数であることに注意

これらの関数を内生的に求める

モデルの概要　－　具体例

Libor Markov Functional Model　－　まとめ

他の満期の債券価格　－　これでイールドカーブが引ける

$$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i) = P_{i,n}(X_i) \times E^{Q_n}\left[\frac{1}{P_{j,n}(X_j)} \middle| X_i \right]$$

nでなく一般の時点 j (＜n)

$$P_{i,n} = P_{i,n}(X_i) = \frac{1}{(1+\delta_{i+1} L_{i,i,i+1}(X_i)) E^{Q_n}\left[\frac{1}{P_{i+1,n}(X_{i+1})} \middle| X_i \right]}$$

$$P_{j,n} = P_{j,n}(X_j) = \frac{1}{(1+\delta_{j+1} L_{j,j,j+1}(X_j)) E^{Q_n}\left[\frac{1}{P_{j+1,n}(x_{j+1})} \middle| X_j \right]}$$

Libor ⇒　Numeraire　⇒　**一般の満期の債券**

モデルの概要　－　具体例 (おわり)

Libor Markov Functional Model　－　まとめ

他の満期の債券価格　－　これでイールドカーブが引ける

$$P_{i,j} = P_{i,j}(X_i) = P_{i,n}(X_i) \times E^{Q_n}\left[\frac{1}{P_{j,n}(X_j)} \middle| X_i \right]$$

$$P_{i,n} = P_{i,n}(X_i) = \frac{1}{(1+\delta_{i+1} L_{i,i,i+1}(X_i)) E^{Q_n}\left[\frac{1}{P_{i+1,n}(X_{i+1})} \middle| X_i \right]}$$

$$P_{j,n} = P_{j,n}(X_j) = \frac{1}{(1+\delta_{j+1} L_{j,j,j+1}(X_j)) E^{Q_n}\left[\frac{1}{P_{j+1,n}(X_{j+1})} \middle| X_j \right]}$$

結局これをどう求めるかがすべて

How?

Libor ⇒　Numeraire　⇒　**一般の満期の債券**

ロードマップ

モデルの概要

- **本質的な所**

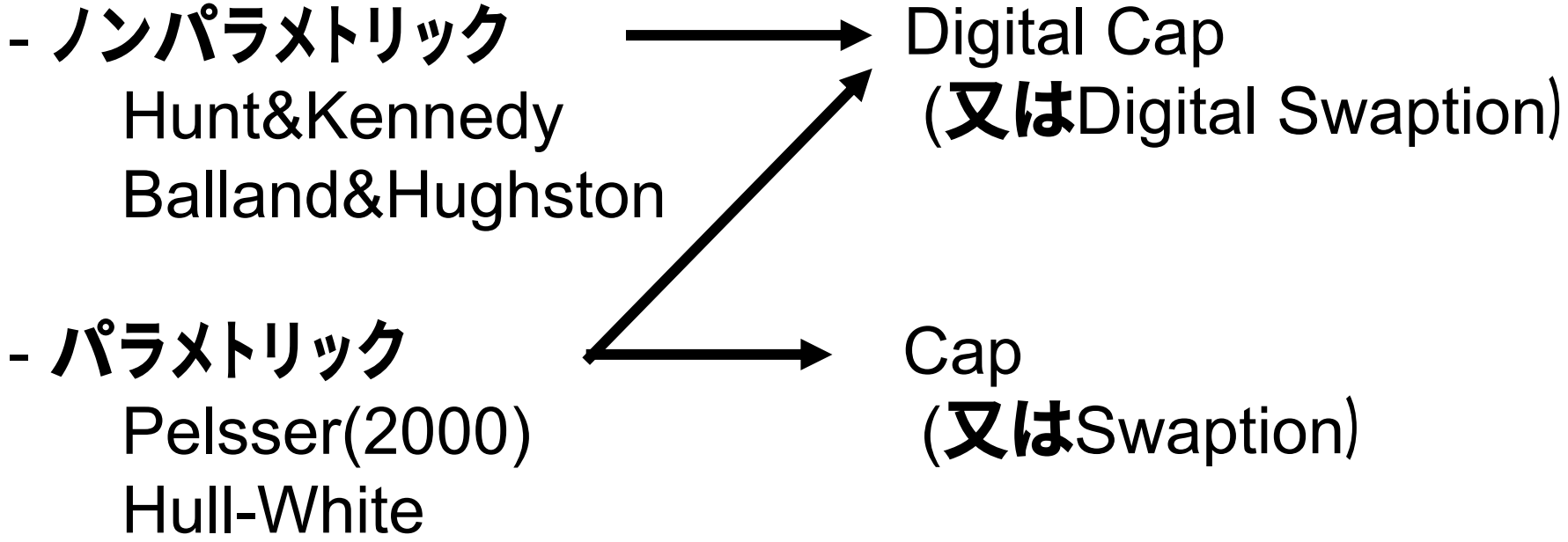
- **数理**

- **具体例**　Libor Markov Functional Model

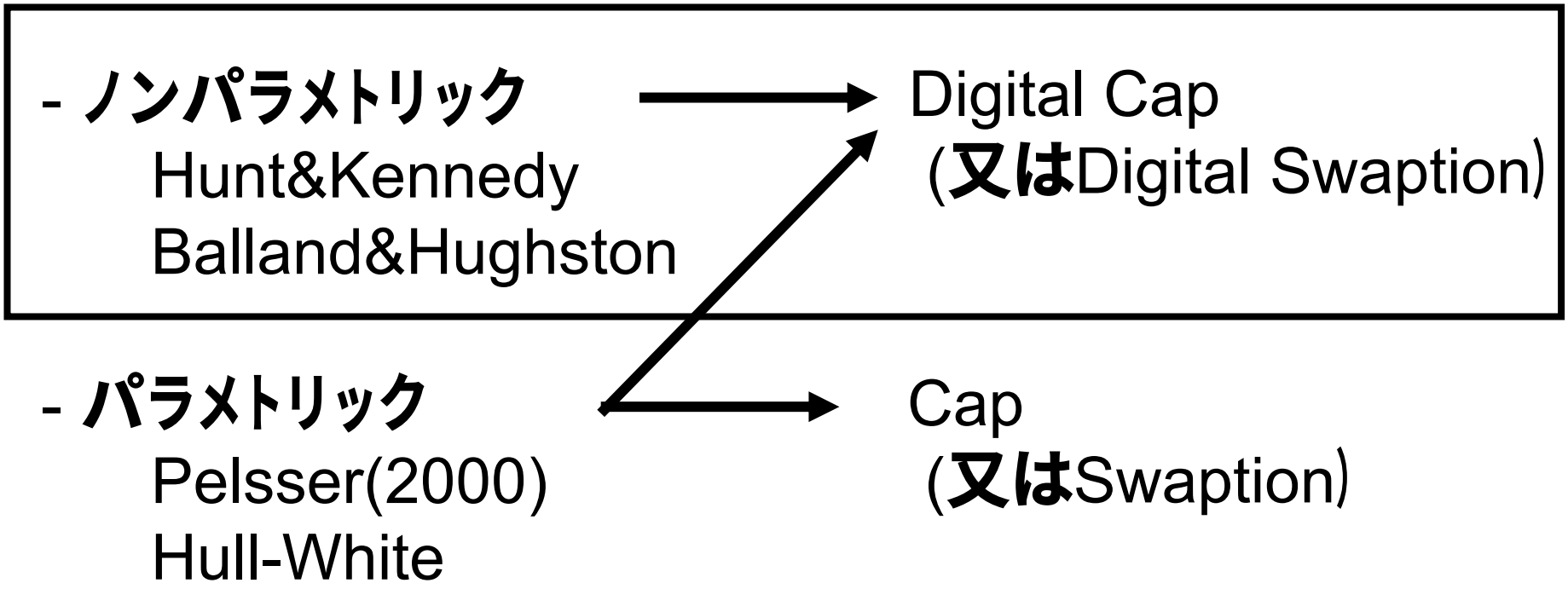
キャリブレーション

- Non Parametric**なアプローチ**

キャリブレーションの種類 - 3種類

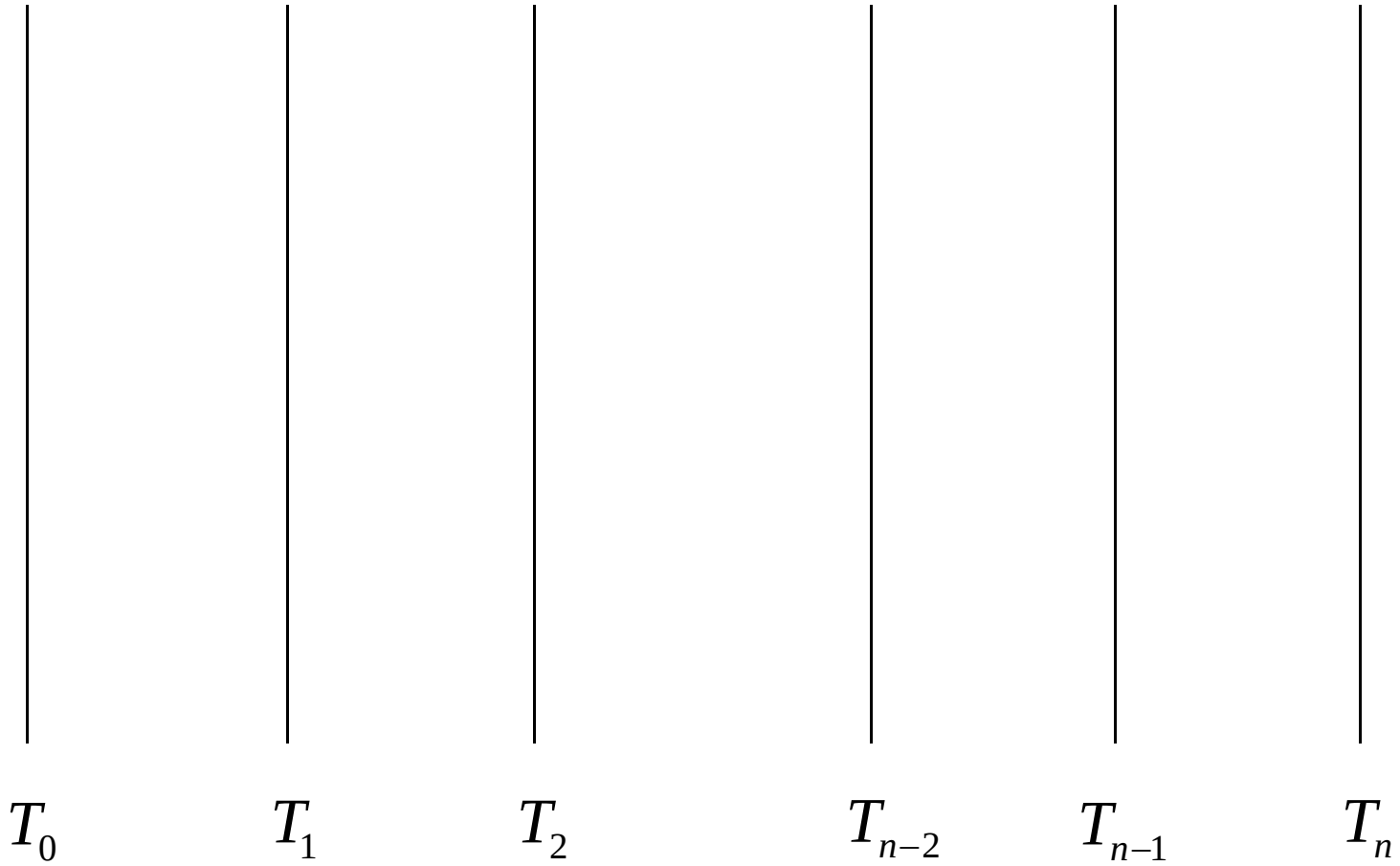


キャリブレーションの種類 - 3種類



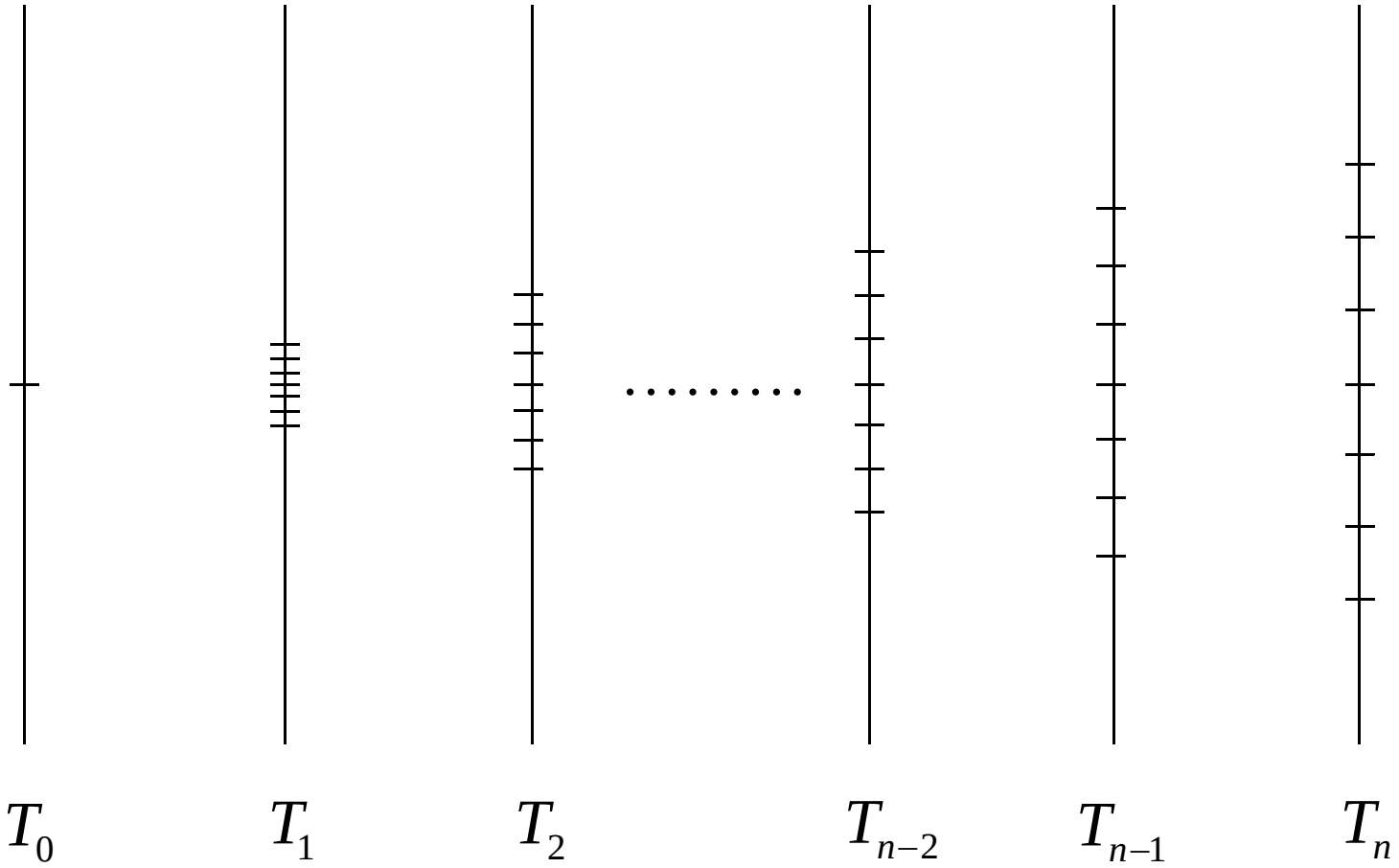
実装の最終着地点

必要な時点のみでGridを張る



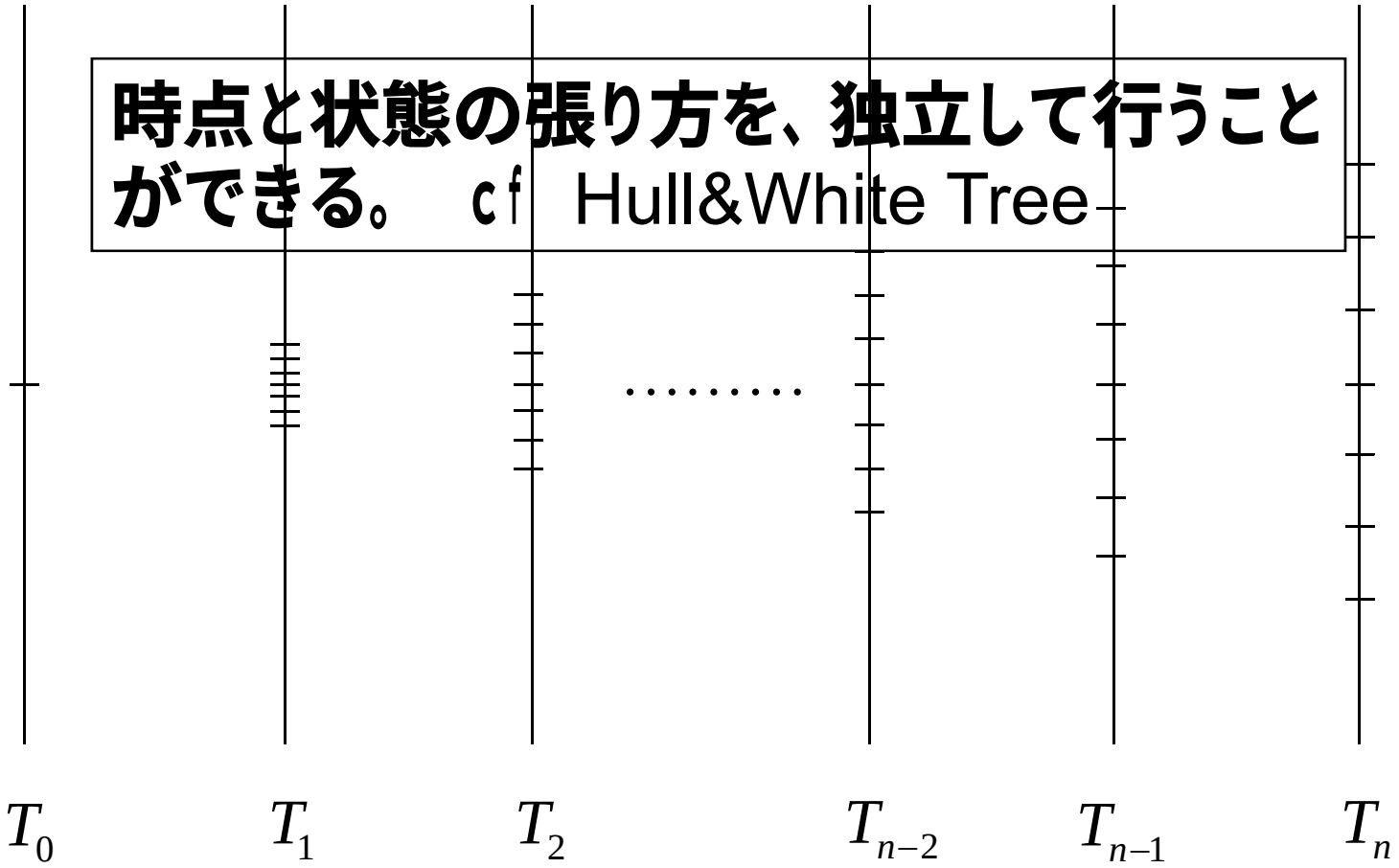
実装の最終着地点

ファクター $X_i = \int_0^{T_i} \sigma(s) dW_s$ **のスパンを張る**



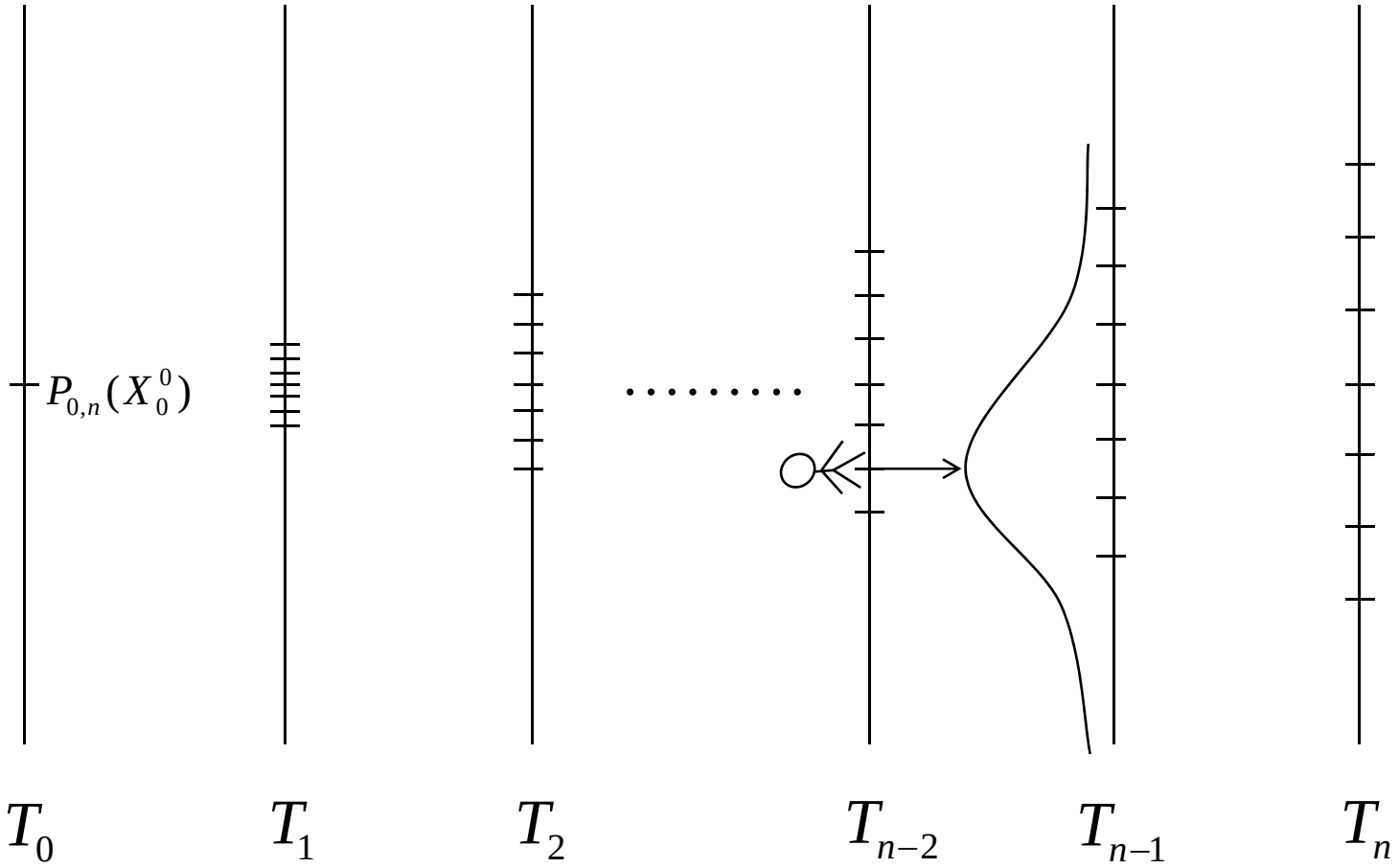
実装の最終着地点

ファクター $X_i = \int_0^{T_i} \sigma(s) dW_s$ **のスパンを張る**



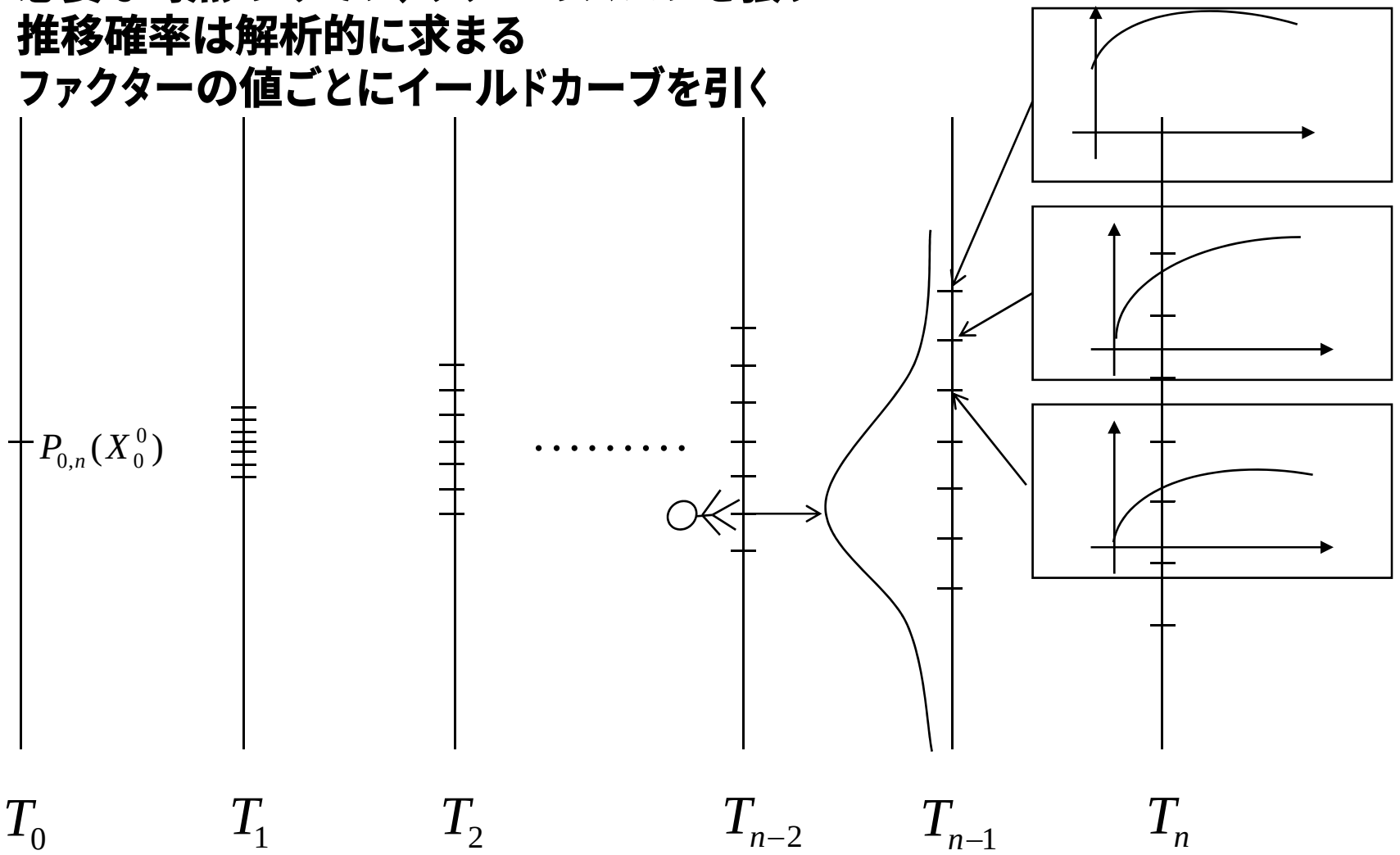
実装の最終着地点

$$X_i = \int_0^{T_i} \sigma(s) dW_s$$ より推移確率は解析的に求まる

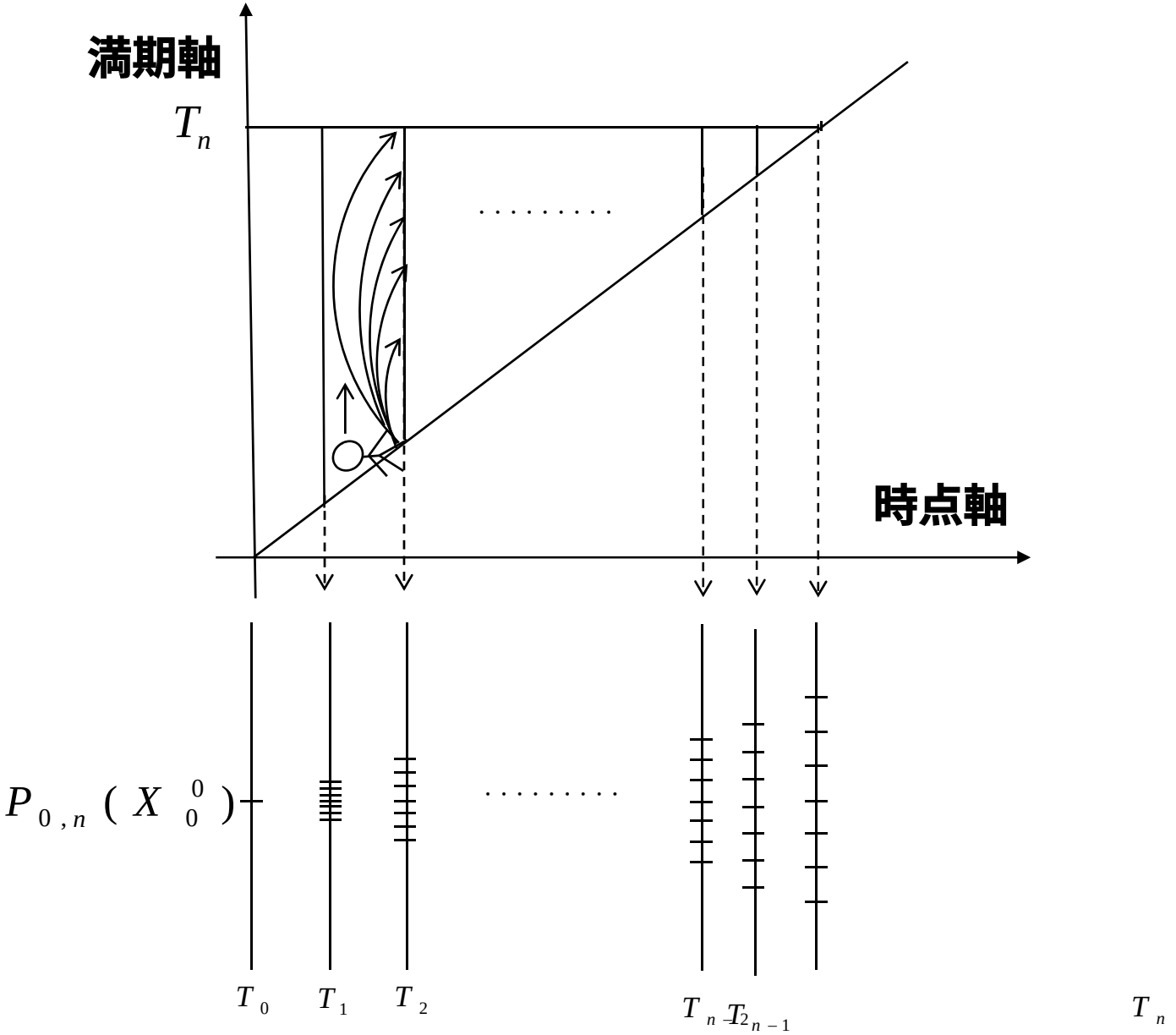


実装の最終着地点

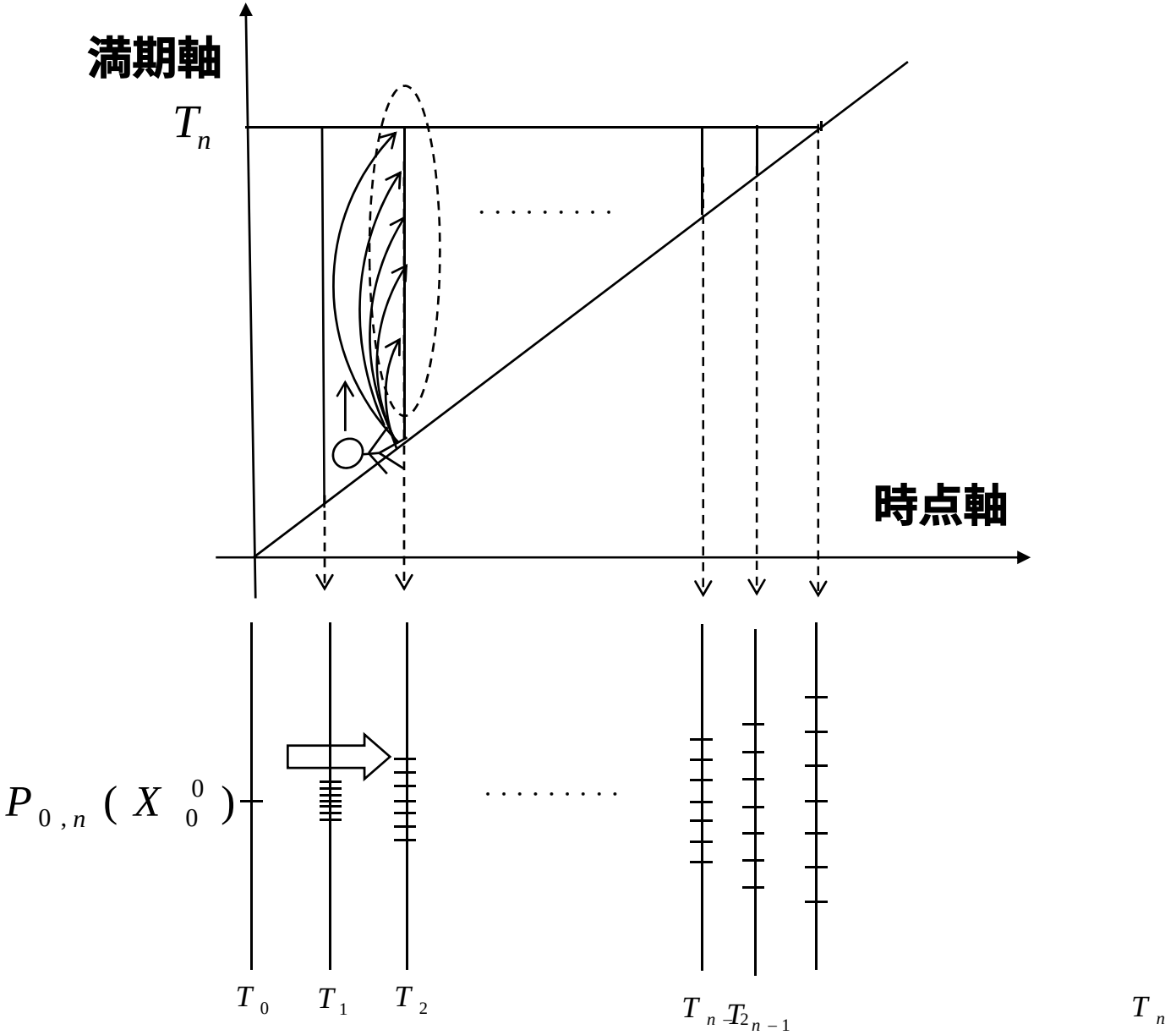
必要な時点のみでファクターのスパンを張り
推移確率は解析的に求まる
ファクターの値ごとにイールドカーブを引く



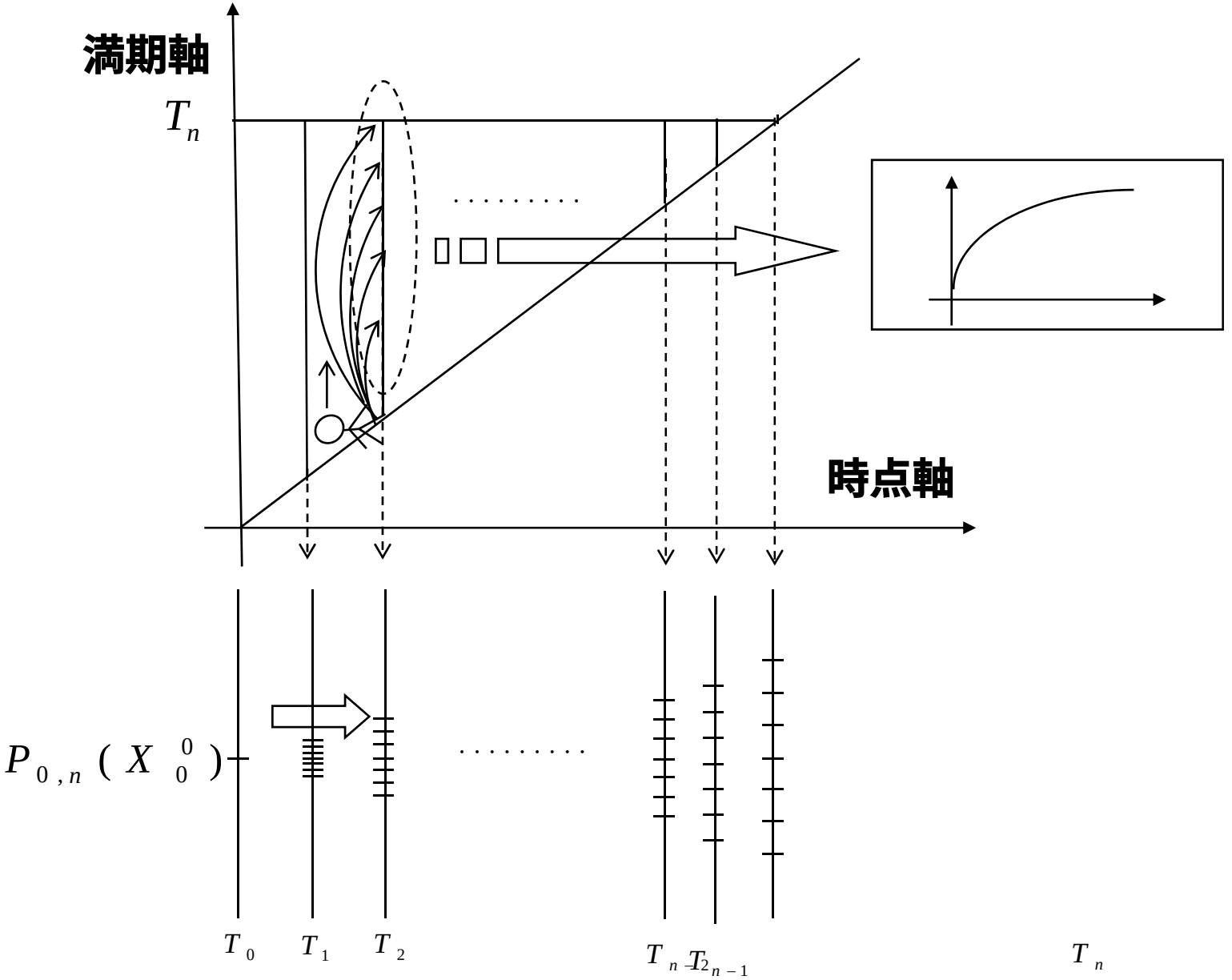
キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法



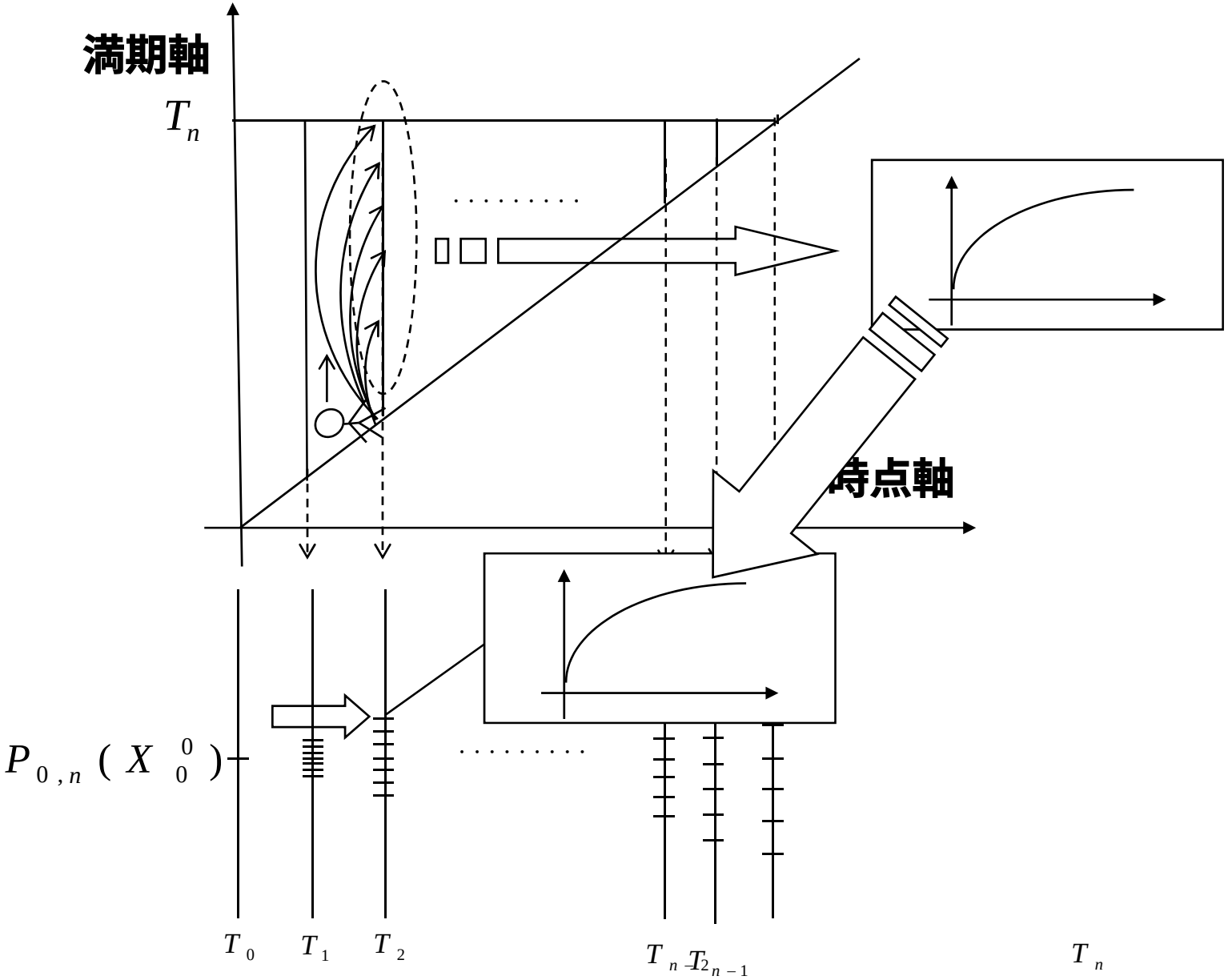
キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法



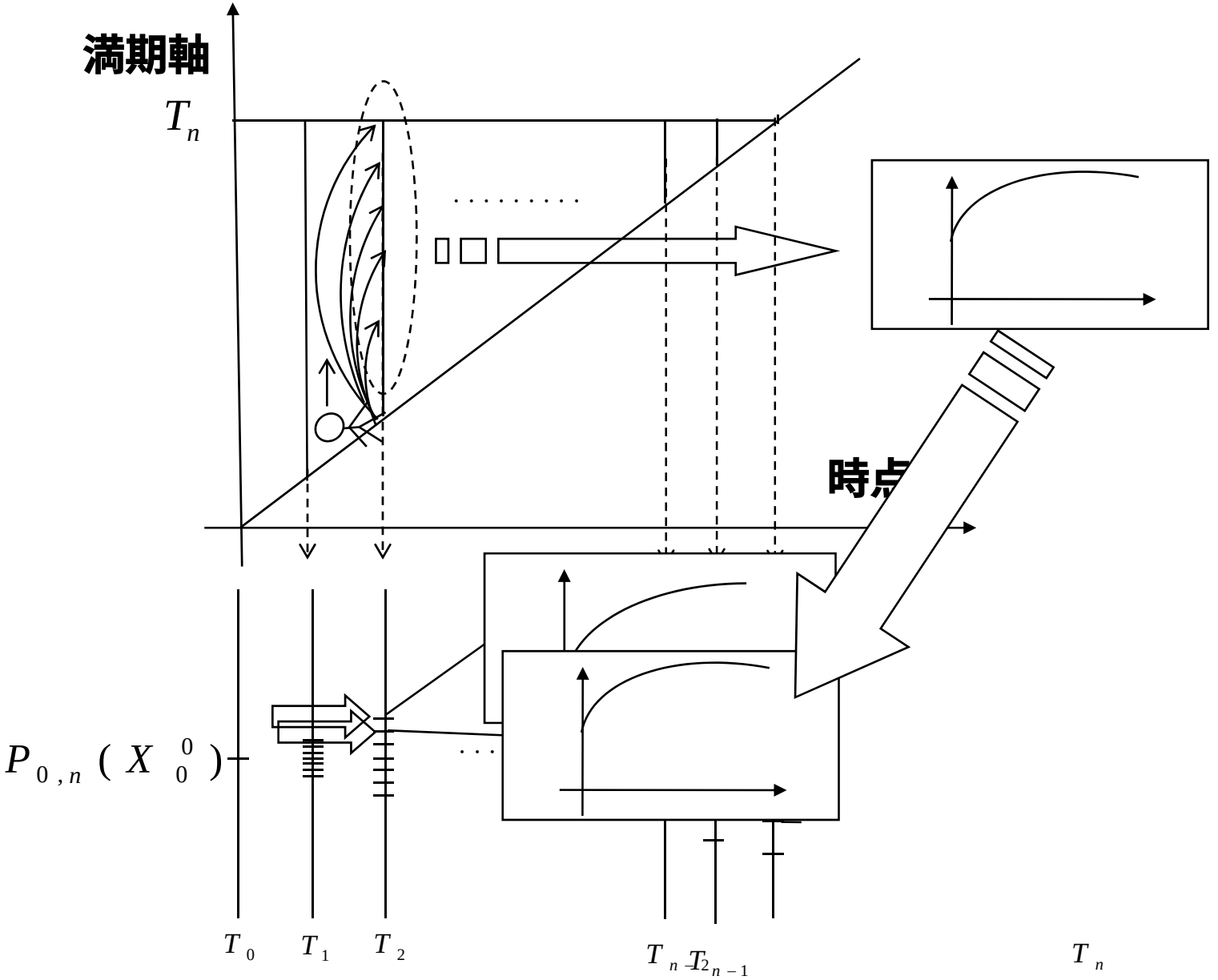
キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法



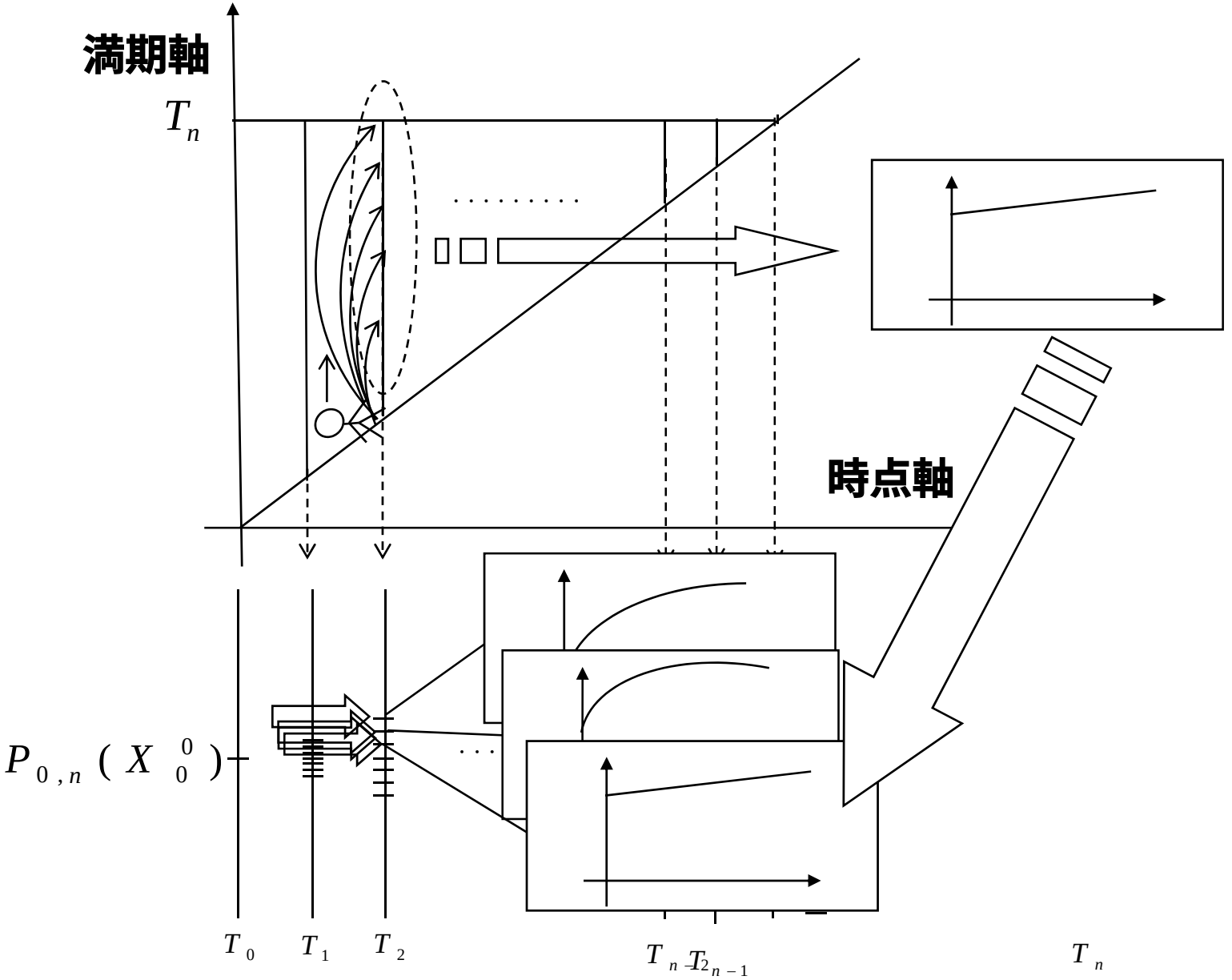
キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

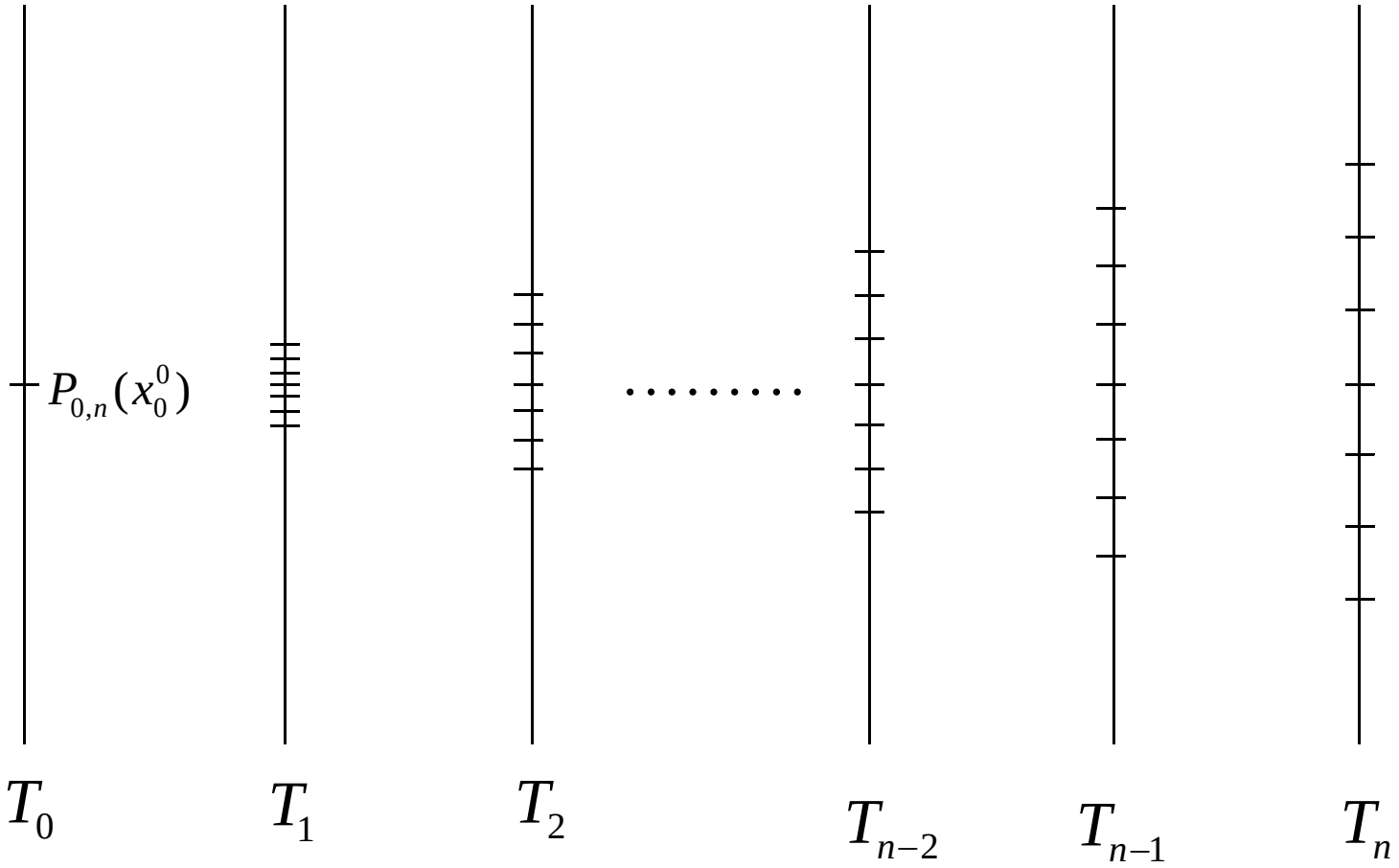


キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

Step 1		Step 2		Step 3
ファクターのスパン	⇒	対応するNumeraireの値を求め	⇒	YCを引く

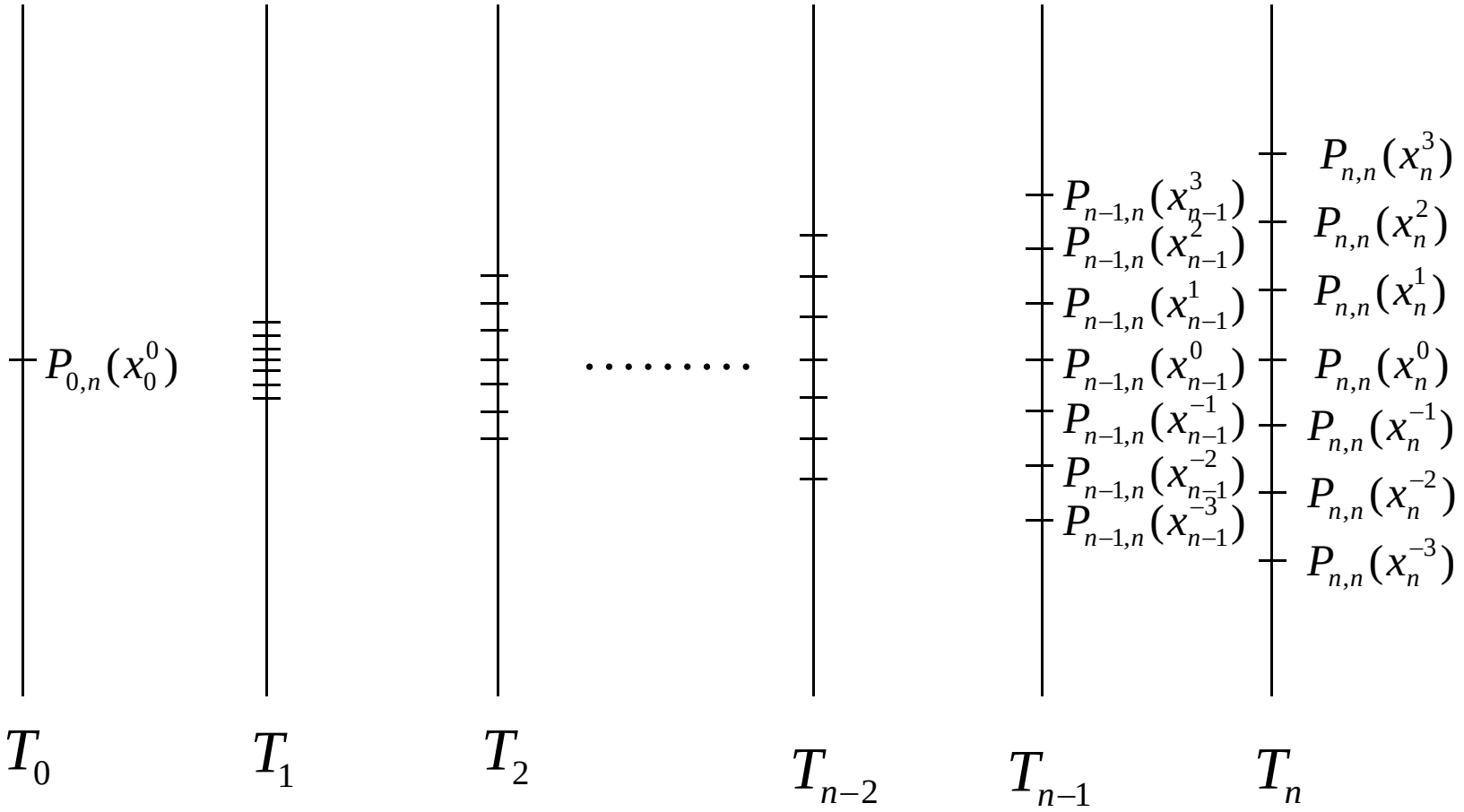
キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

Step 1
ファクターのスパン



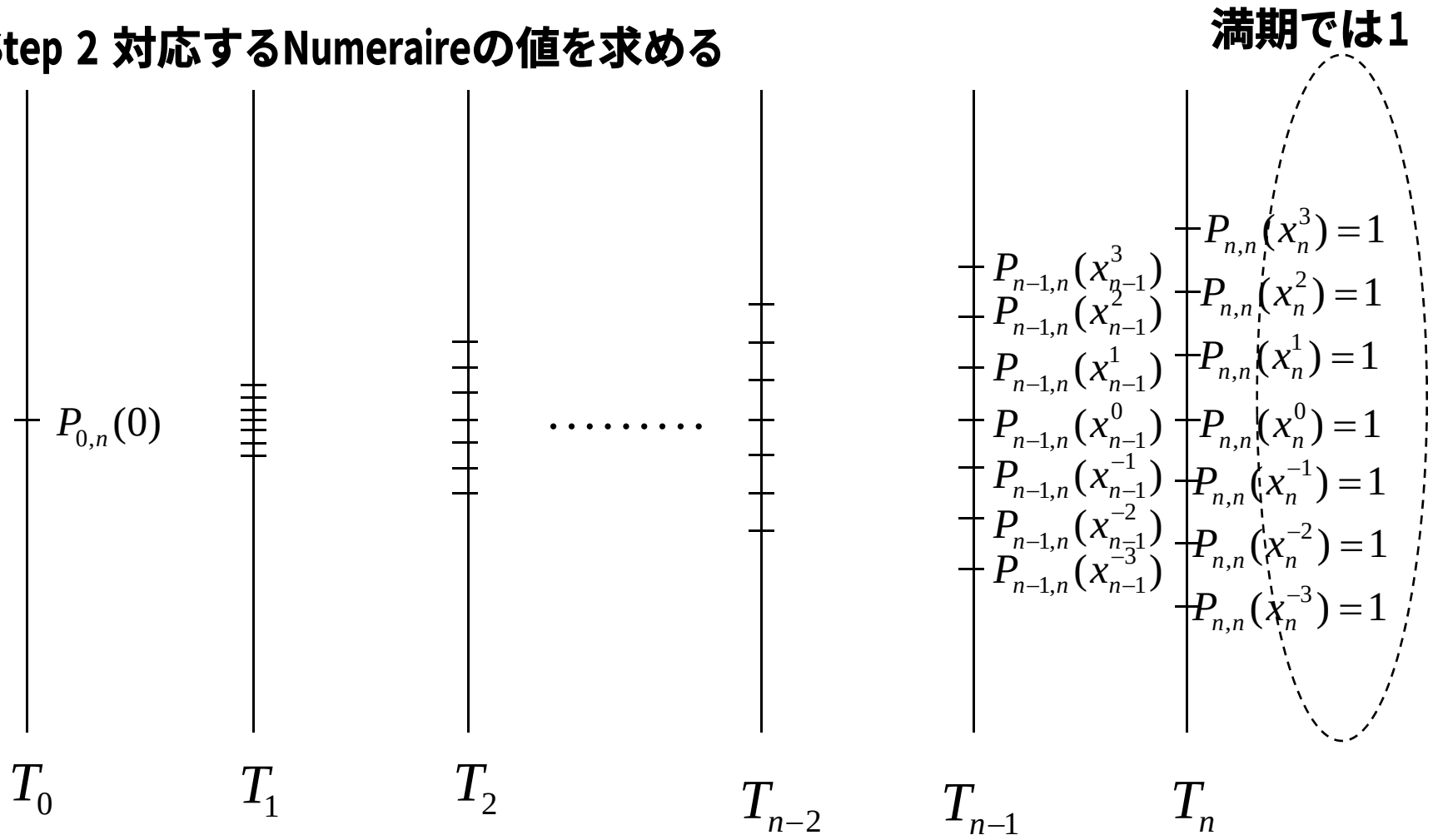
キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

Step 2 対応するNumeraireの値を求める



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

Step 2 対応するNumeraireの値を求める

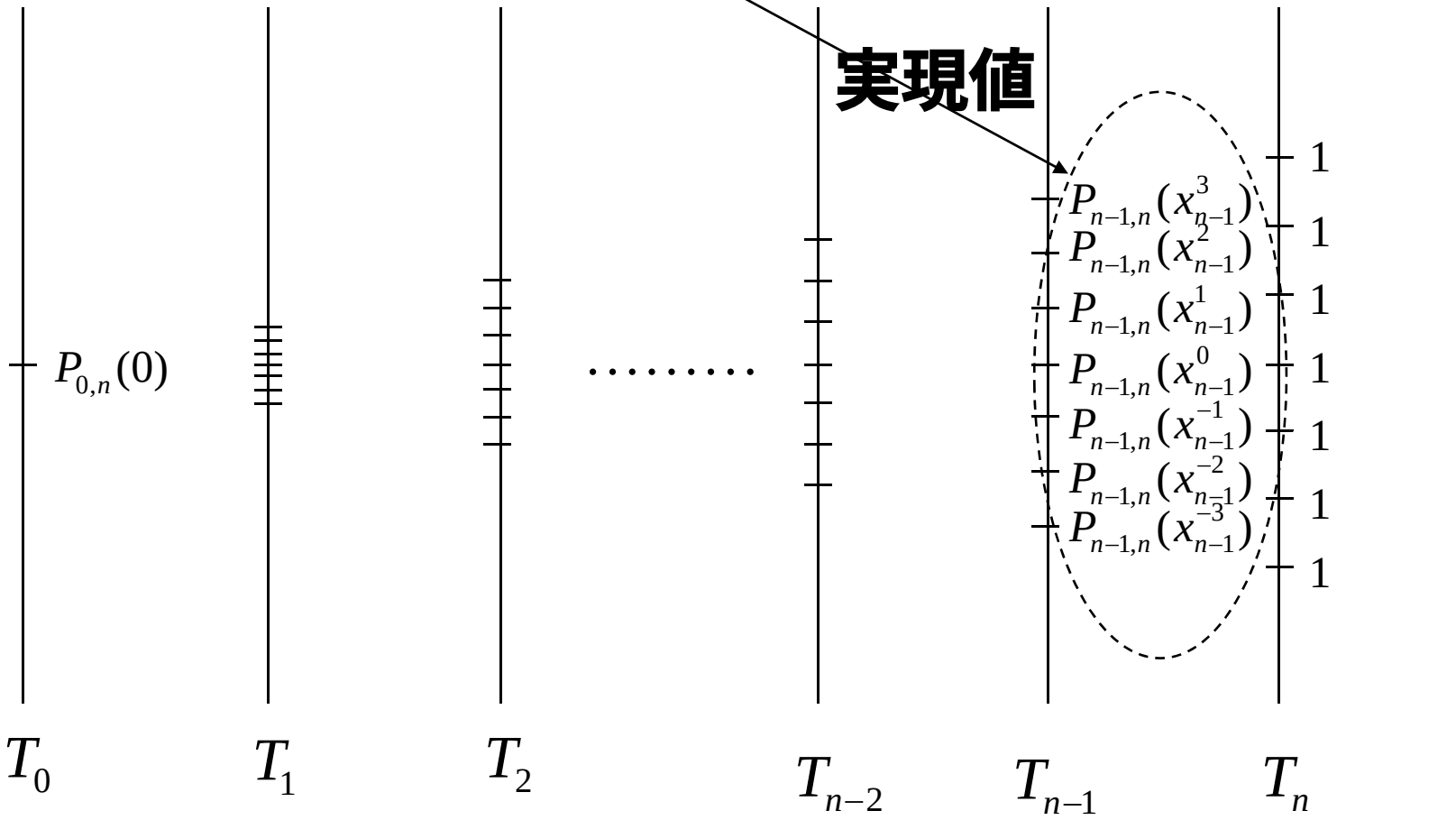


キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

$$P_{n-1,n}(X_{n-1}) = \frac{1}{(1+\delta_{n-1}L_{n-1,n-1,n}(X_{n-1}))E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{n,n}(X_n)}\right| X_{n-1}\right]}$$

Step 2 対応するNumeraireの値を求める

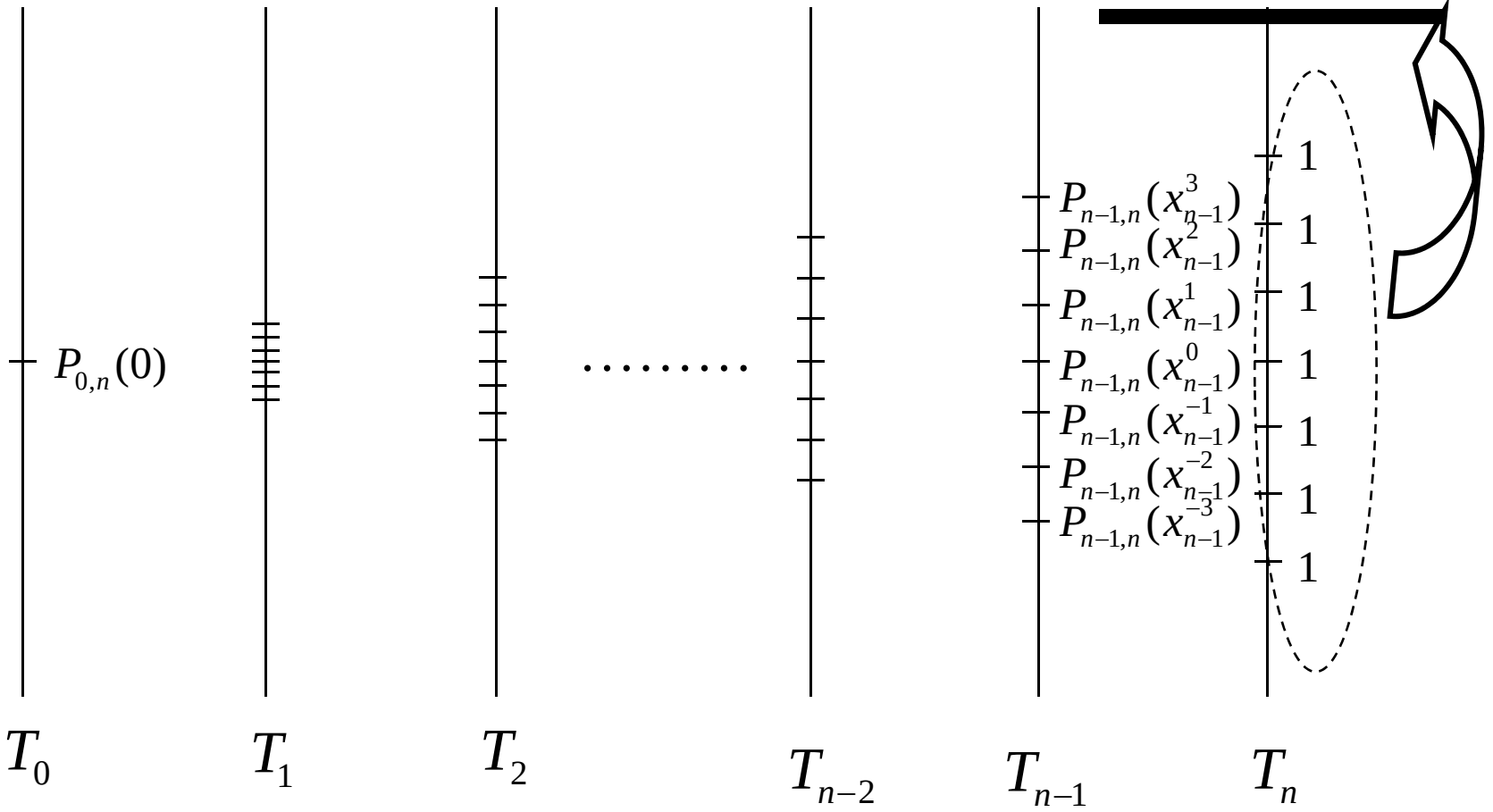
実現値



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

$$P_{n-1,n}(X_{n-1}) = \frac{1}{(1+\delta_{n-1}L_{n-1,n-1,n}(X_{n-1}))E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{n,n}(X_n)}\right| X_{n-1}\right]}$$

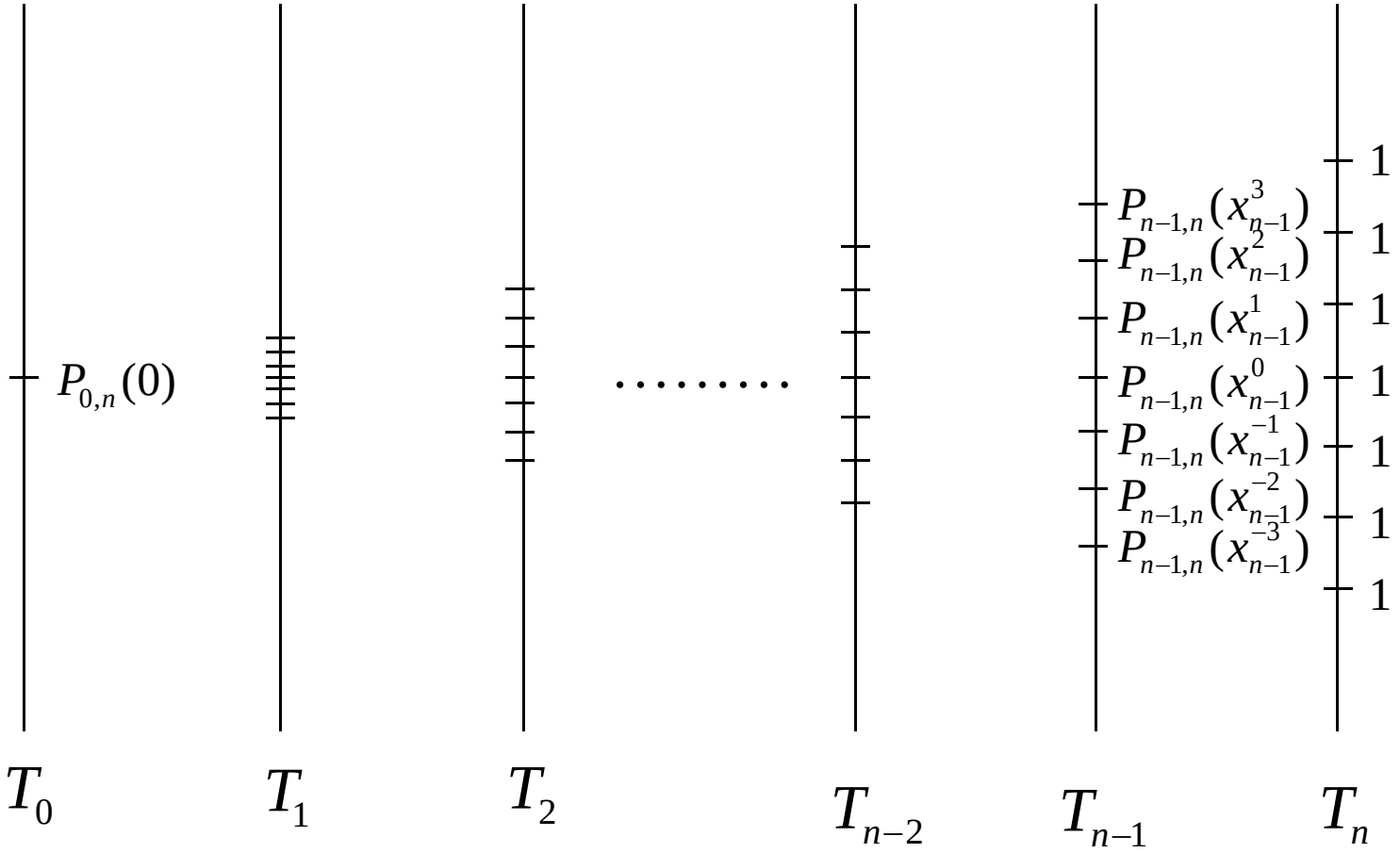
Step 2 対応するNumeraireの値を求める



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

$$P_{n-1,n}(X_{n-1}) = \frac{1}{(1+\delta_{n-1}L_{n-1,n-1,n}(X_{n-1}))\times 1}$$

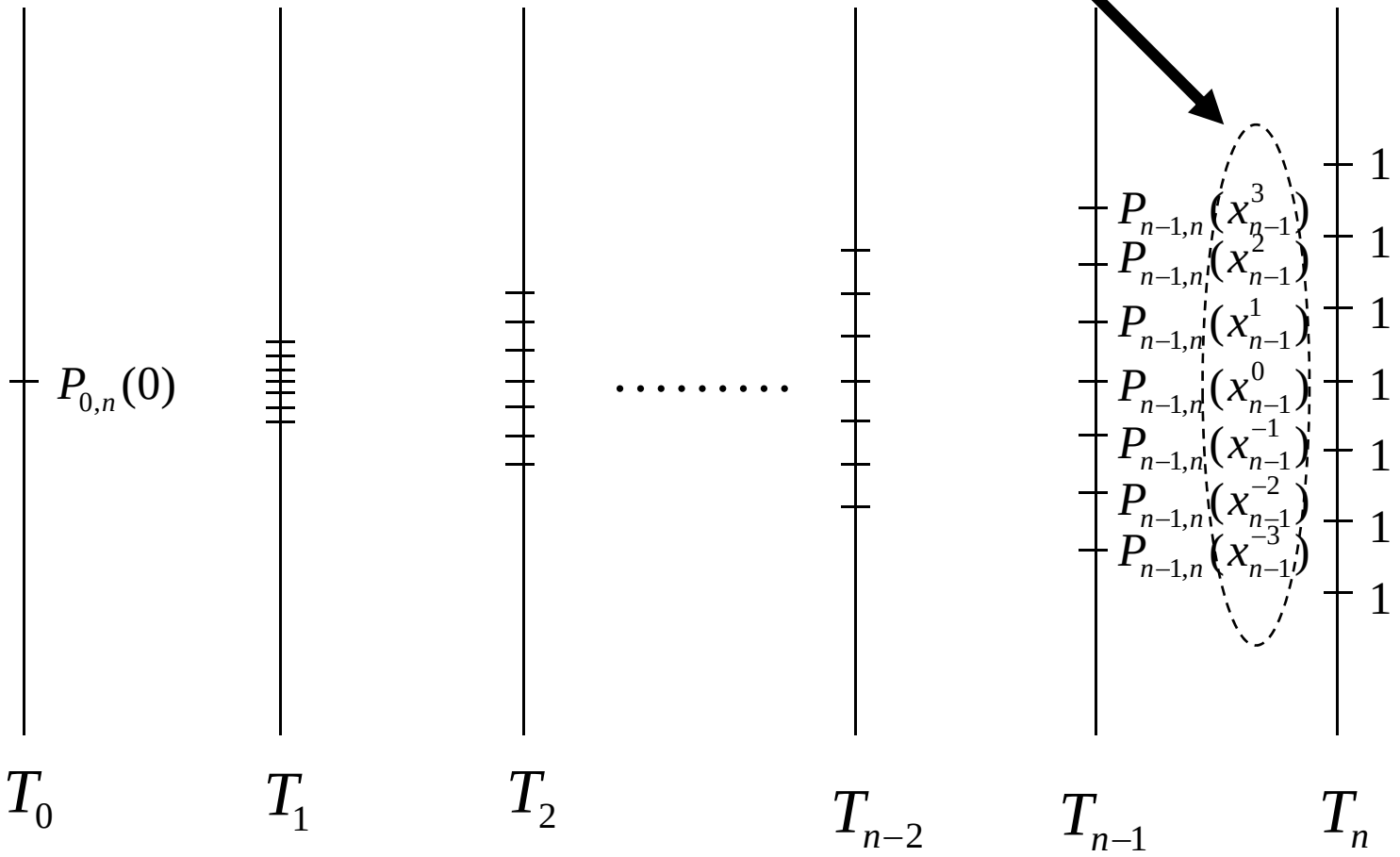
Step 2 対応するNumeraireの値を求める



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

$$P_{n-1,n}(X_{n-1}) = \frac{1}{(1+\delta_{n-1}L_{n-1,n-1,n}(X_{n-1}))\times 1}$$

Step 2 対応するNumeraireの値を求める



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

$$P_{n-1,n}(X_{n-1}) = \frac{1}{(1+\delta_{n-1}L_{n-1,n-1,n}(X_{n-1}))\times 1}$$

Step 2 対応するNumeraireの値を求める

$$x_{n-1}^{3} \longrightarrow L_{n-1,n}(x_{n-1}^{3}) \qquad P(x_{n-1}^{3})$$

$$x_{n-1}^{3} \longrightarrow L_{n-1,n}(x_{n-1}^{3}) \qquad P(x_{n-1}^{3})$$

$$x_{n-1}^{3} \longrightarrow L_{n-1,n}(x_{n-1}^{3}) \qquad P(x_{n-1}^{3})$$

$$x_{n-1}^{0} \longrightarrow L_{n-1,n}(x_{n-1}^{0}) \qquad P(x_{n-1}^{0})$$

$$x_{n-1}^{-1} \longrightarrow L_{n-1,n}(x_{n-1}^{-1}) \qquad P(x_{n-1}^{-1})$$

$$x_{n-1}^{-2} \longrightarrow L_{n-1,n}(x_{n-1}^{-2}) \qquad P(x_{n-1}^{-2})$$

$$x_{n-1}^{-3} \longrightarrow L_{n-1,n}(x_{n-1}^{-3}) \qquad P(x_{n-1}^{-3})$$

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

$$P_{n-1,n}(X_{n-1}) = \frac{1}{(1+\delta_{n-1}L_{n-1,n-1,n}(X_{n-1}))\times 1}$$

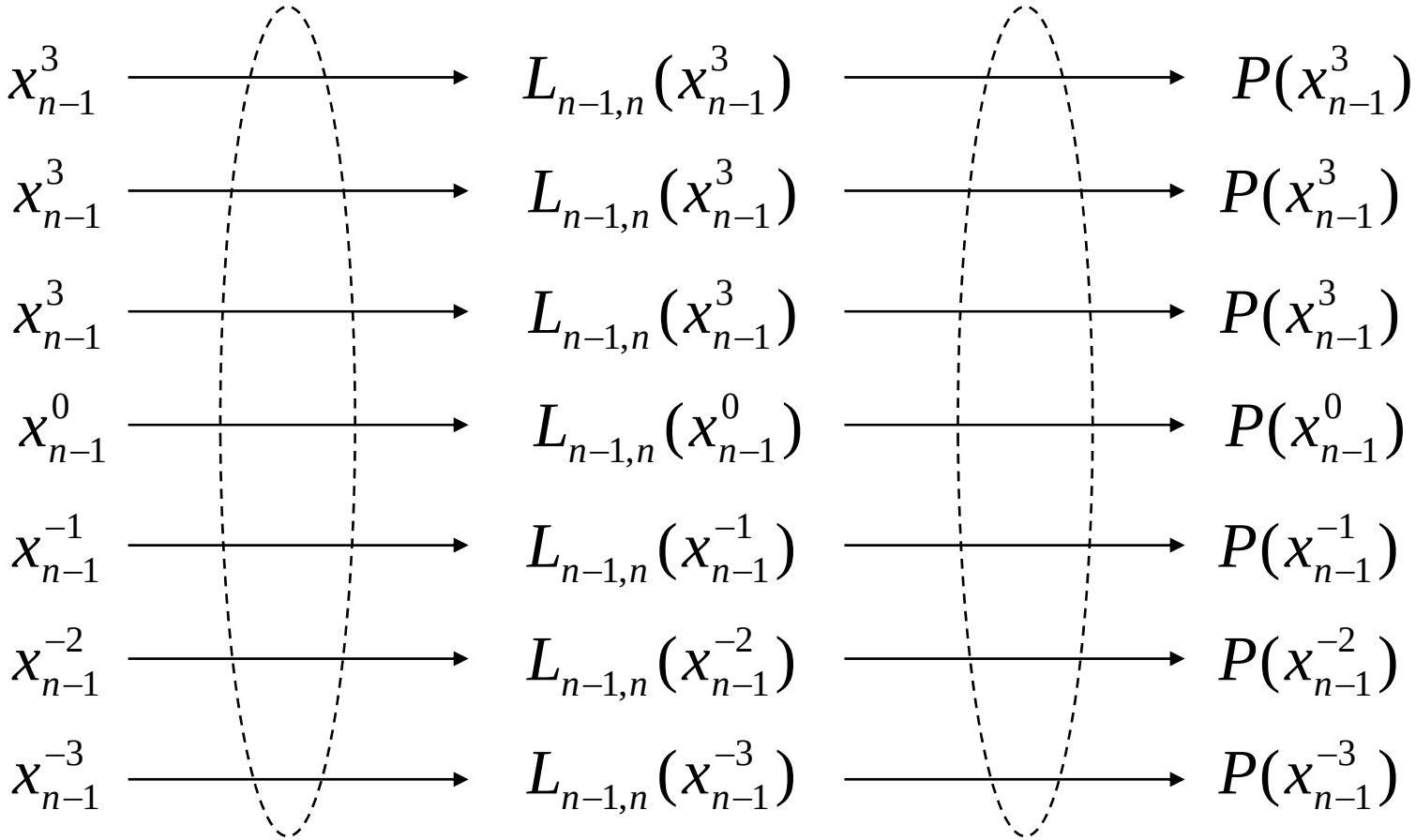
Step 2 対応するNumeraireの値を求める

$$x_{n-1}^{3} \longrightarrow L_{n-1,n}(x_{n-1}^{3}) \longrightarrow P(x_{n-1}^{3})$$
$$x_{n-1}^{3} \longrightarrow L_{n-1,n}(x_{n-1}^{3}) \longrightarrow P(x_{n-1}^{3})$$
$$x_{n-1}^{3} \longrightarrow L_{n-1,n}(x_{n-1}^{3}) \longrightarrow P(x_{n-1}^{3})$$
$$x_{n-1}^{0} \longrightarrow L_{n-1,n}(x_{n-1}^{0}) \longrightarrow P(x_{n-1}^{0})$$
$$x_{n-1}^{-1} \longrightarrow L_{n-1,n}(x_{n-1}^{-1}) \longrightarrow P(x_{n-1}^{-1})$$
$$x_{n-1}^{-2} \longrightarrow L_{n-1,n}(x_{n-1}^{-2}) \longrightarrow P(x_{n-1}^{-2})$$
$$x_{n-1}^{-3} \longrightarrow L_{n-1,n}(x_{n-1}^{-3}) \longrightarrow P(x_{n-1}^{-3})$$

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

$$P_{n-1,n}(X_{n-1}) = \frac{1}{(1+\delta_{n-1}L_{n-1,n-1,n}(X_{n-1}))\times 1}$$

Step 2 対応するNumeraireの値を求める

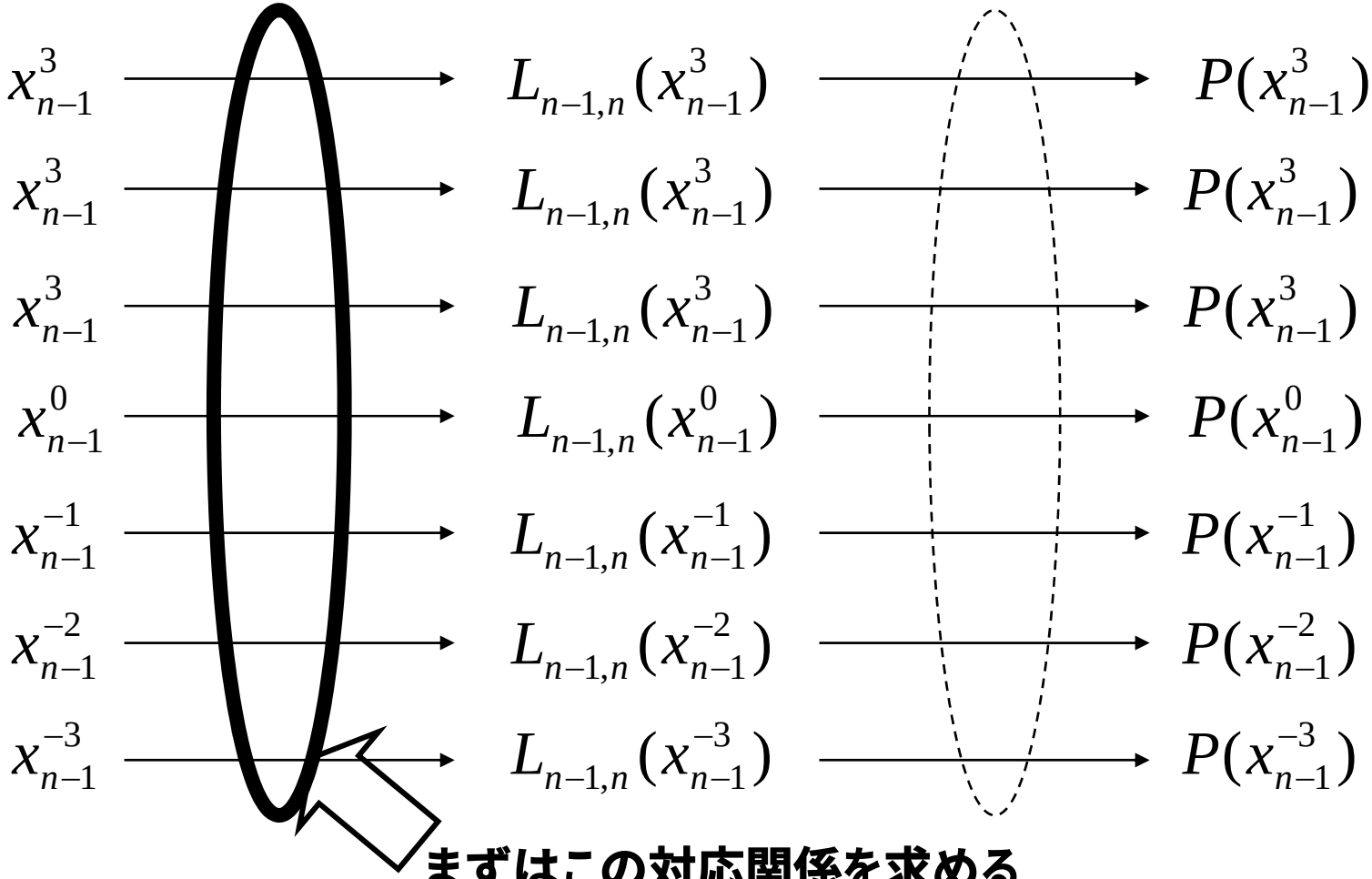


この対応関係を関数とする

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

$$P_{n-1,n}(X_{n-1}) = \frac{1}{(1+\delta_{n-1}L_{n-1,n-1,n}(X_{n-1}))\times 1}$$

Step 2 対応するNumeraireの値を求める



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

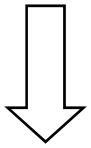
Markov Functional Interest Rate ModelによるDigital Option価格

||

市場のBS式を通じたDigital Option価格のQuotation

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

それぞれのファクターの値に対して



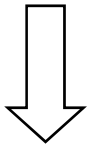
Markov Functional Interest Rate ModelによるDigital Option価格

||

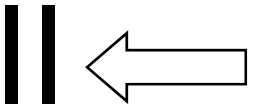
市場のBS式を通じたDigital Option価格のQuotation

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

それぞれのファクターの値に対して



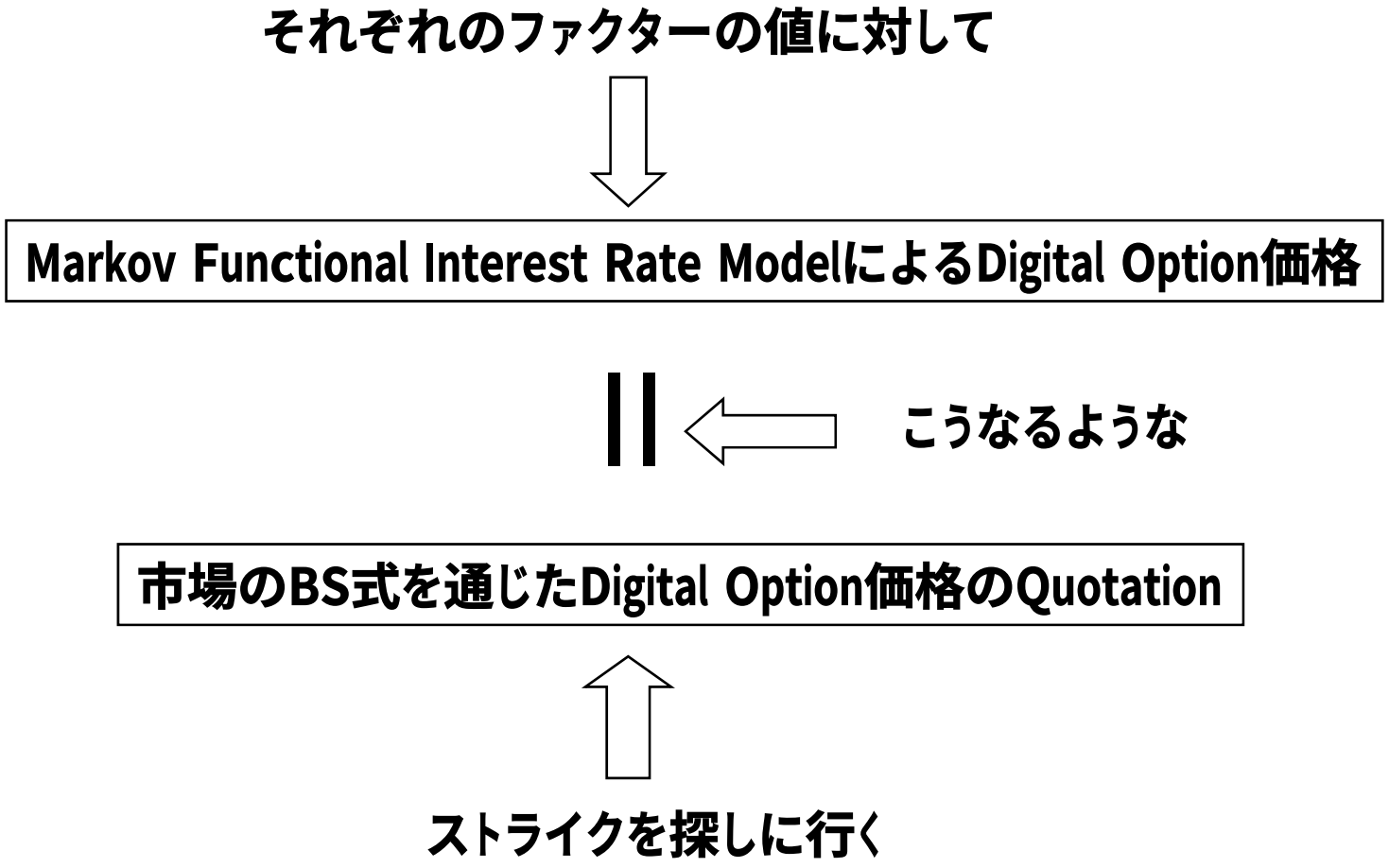
Markov Functional Interest Rate ModelによるDigital Option価格



こうなるような

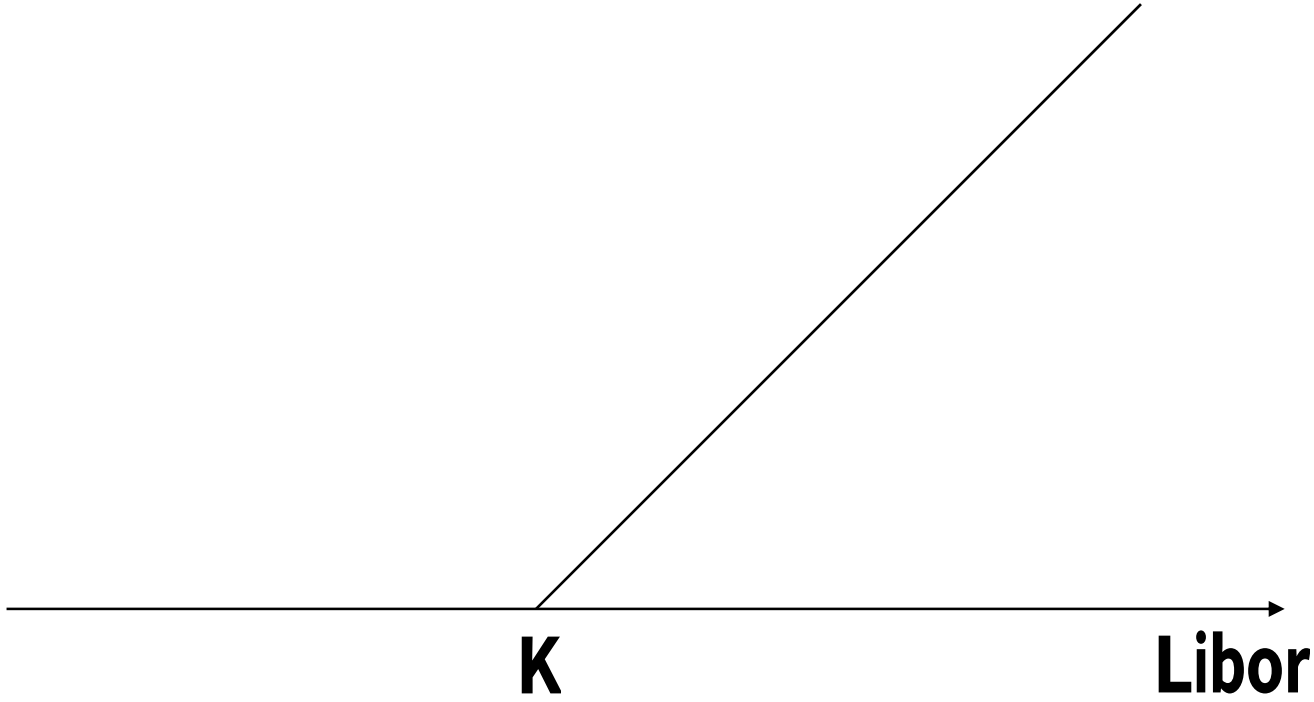
市場のBS式を通じたDigital Option価格のQuotation

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

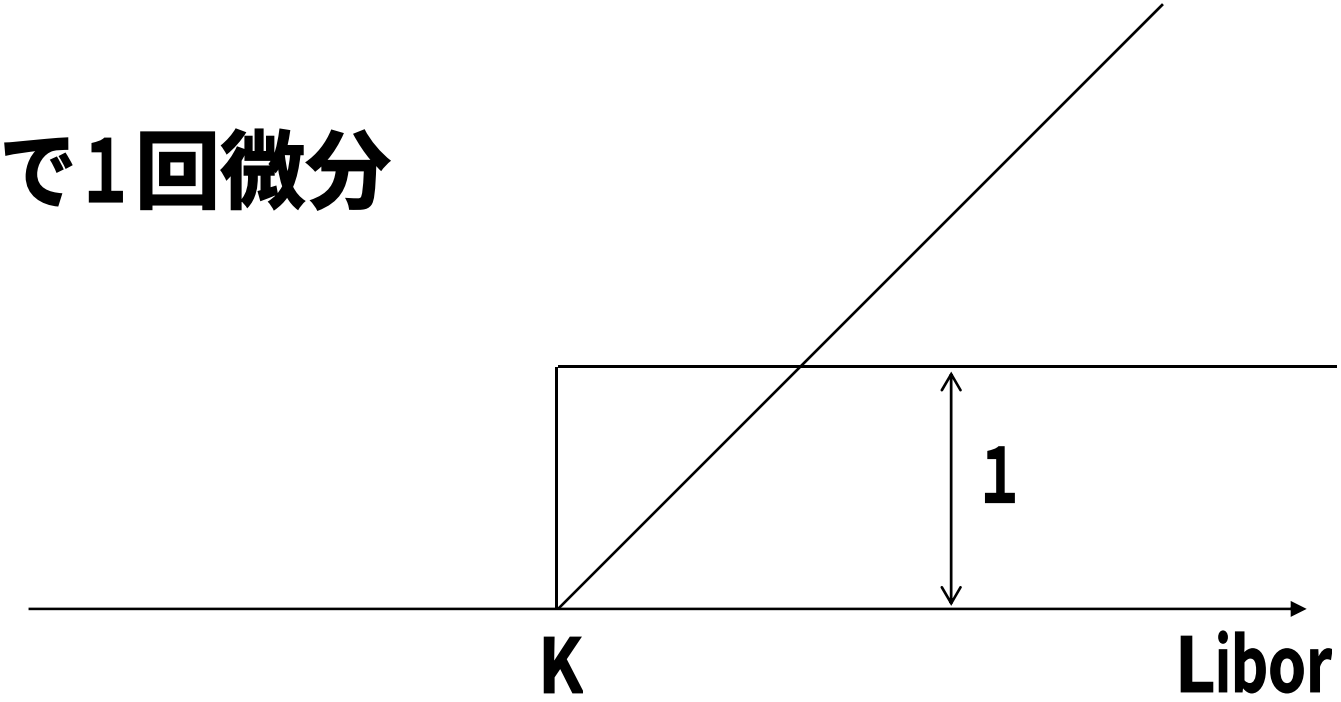
Why Digital Option ?



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

Why Digital Option ?

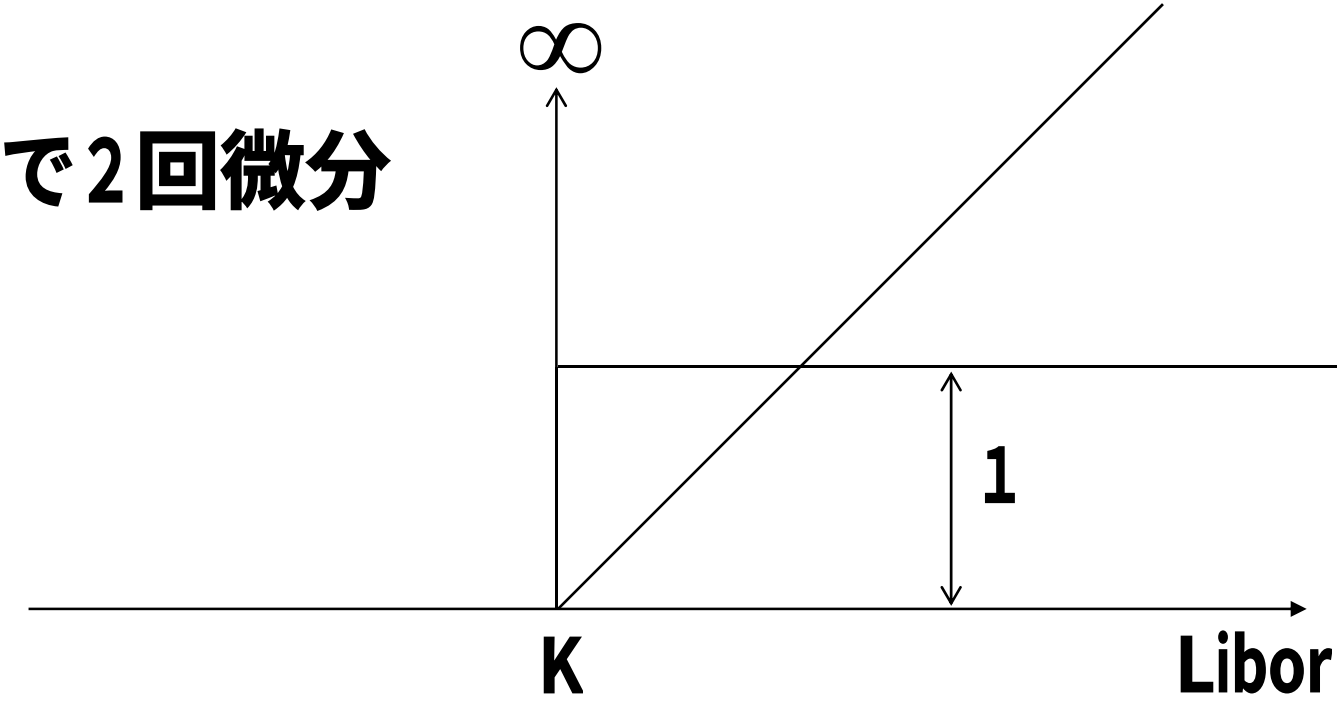
Kで1回微分



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

Why Digital Option ?

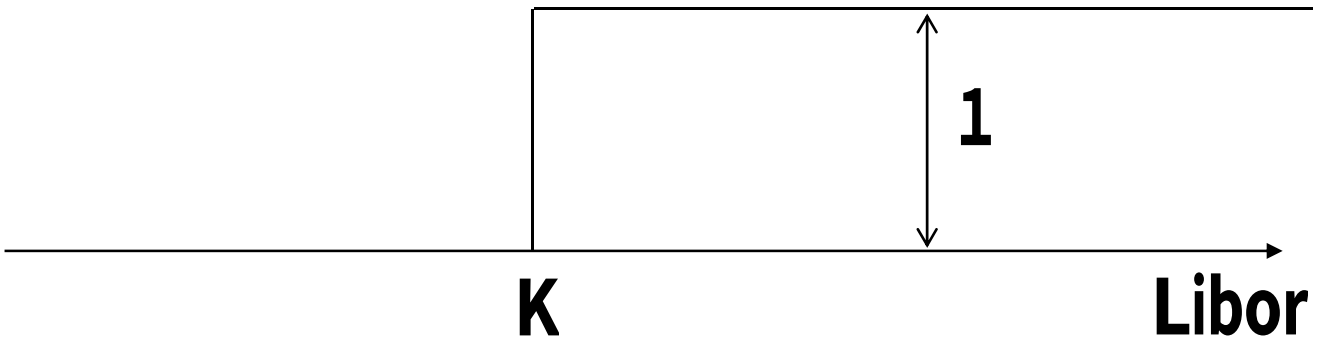
Kで2回微分



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

Why Digital Option ?

この期待値を取るので基本的に分布関数を与える



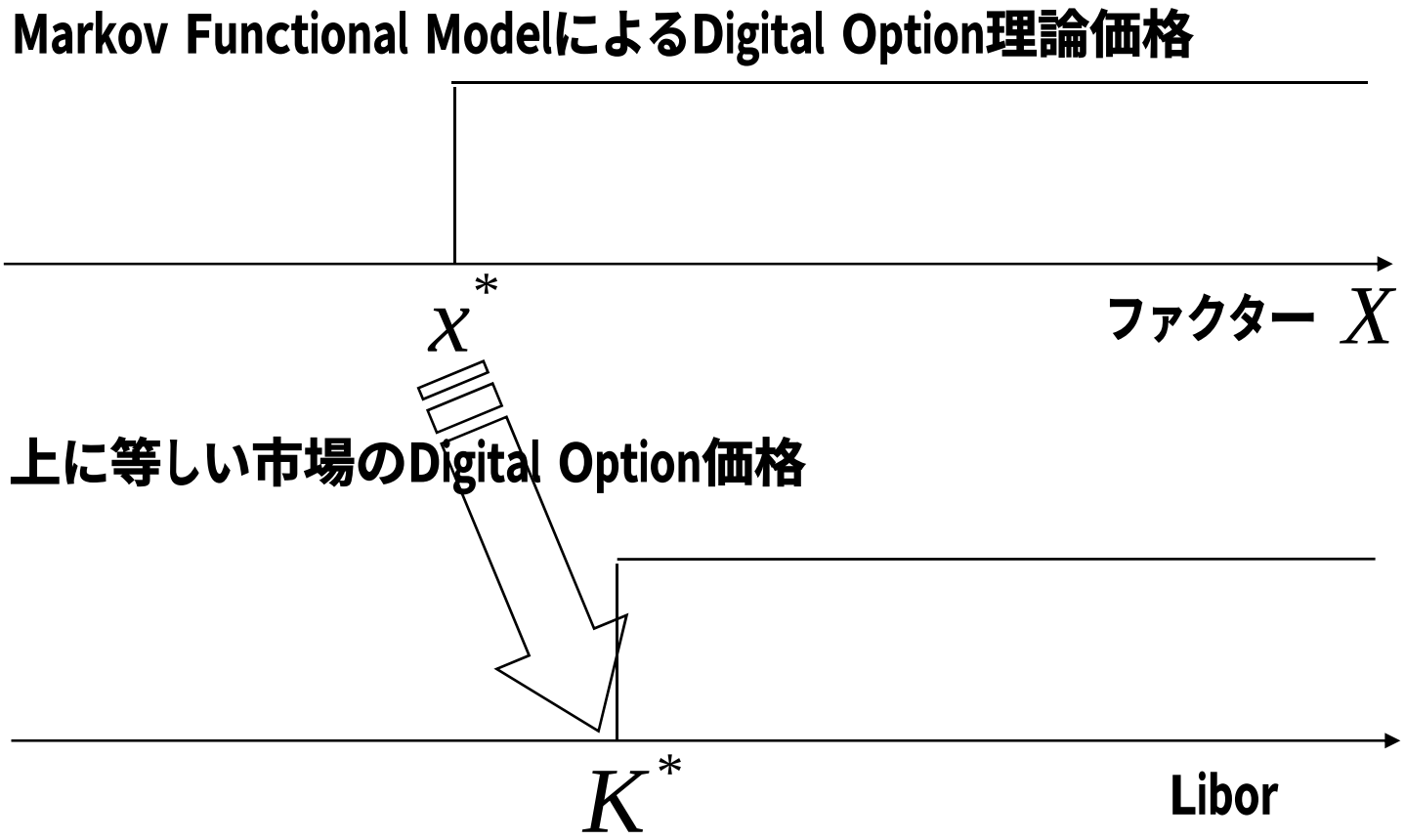
キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

イメージ図　(1)

Markov Functioal ModelによるDigital Option理論価格

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

イメージ図　(1)

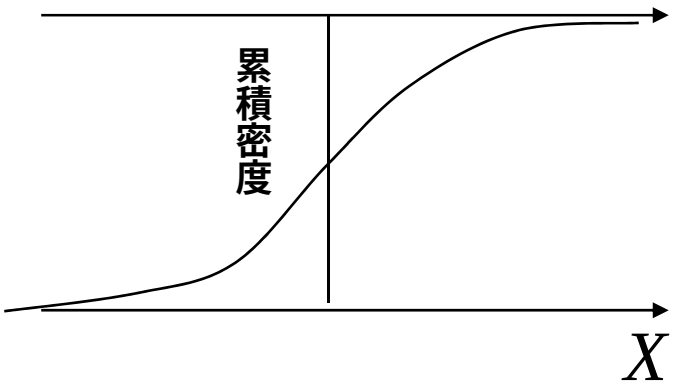


キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

イメージ図　(2)

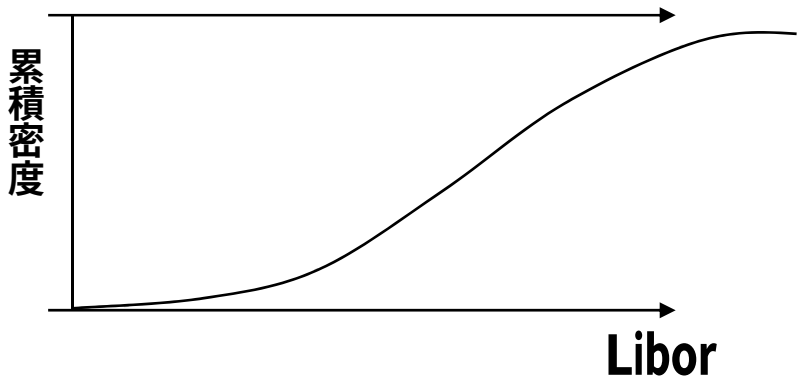
これは与えたので分かっている

X の分布関数



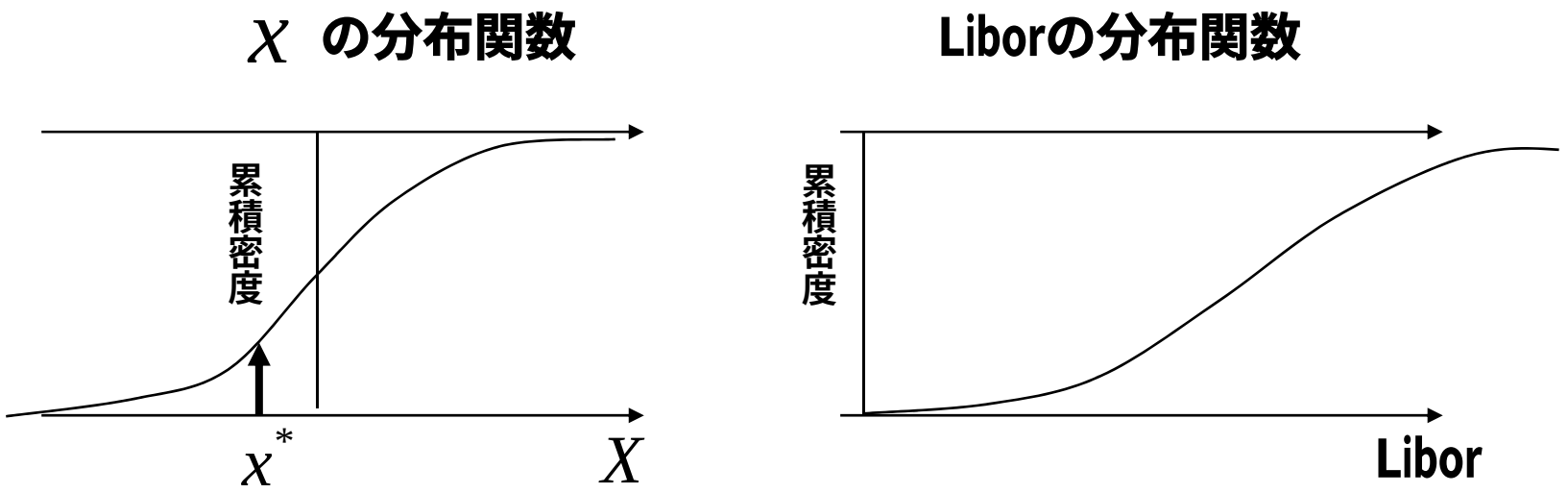
これは市場で与えられている

Liborの分布関数



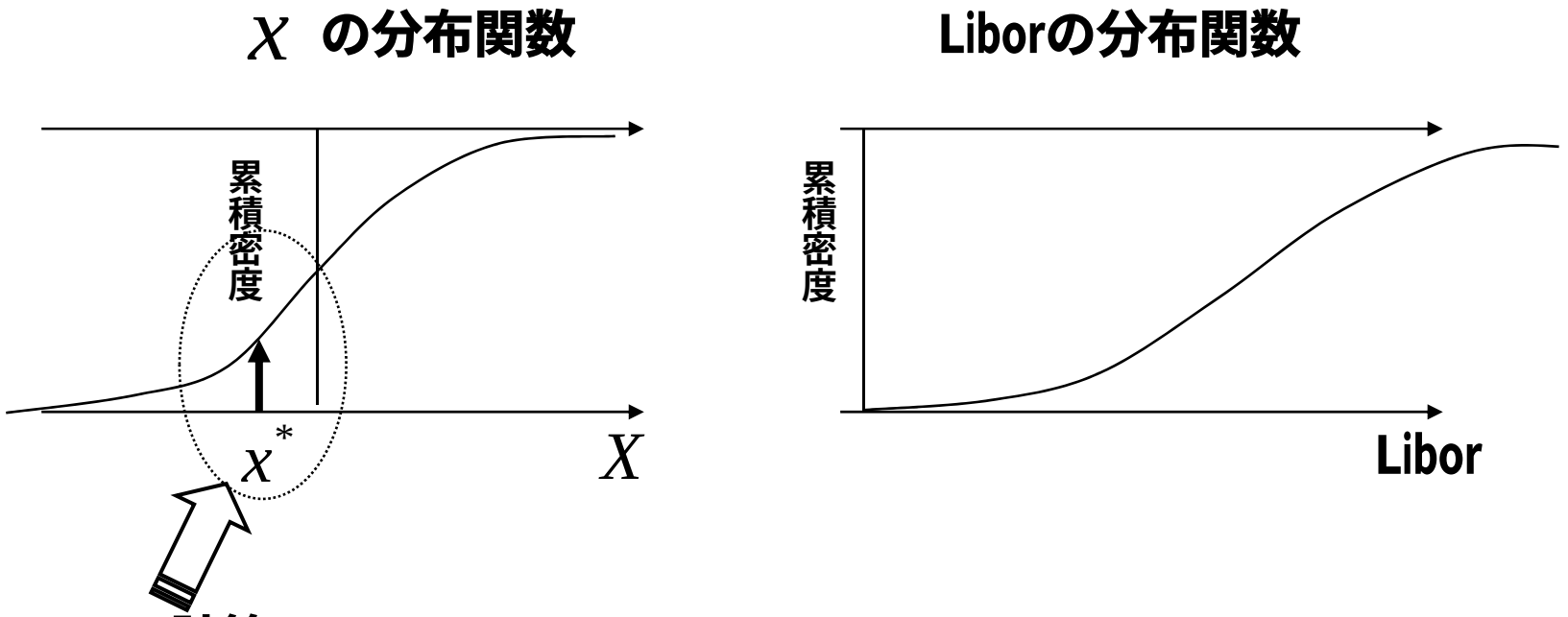
キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

イメージ図　(2)



キャリブレーション　－　ノンパラメトリック法

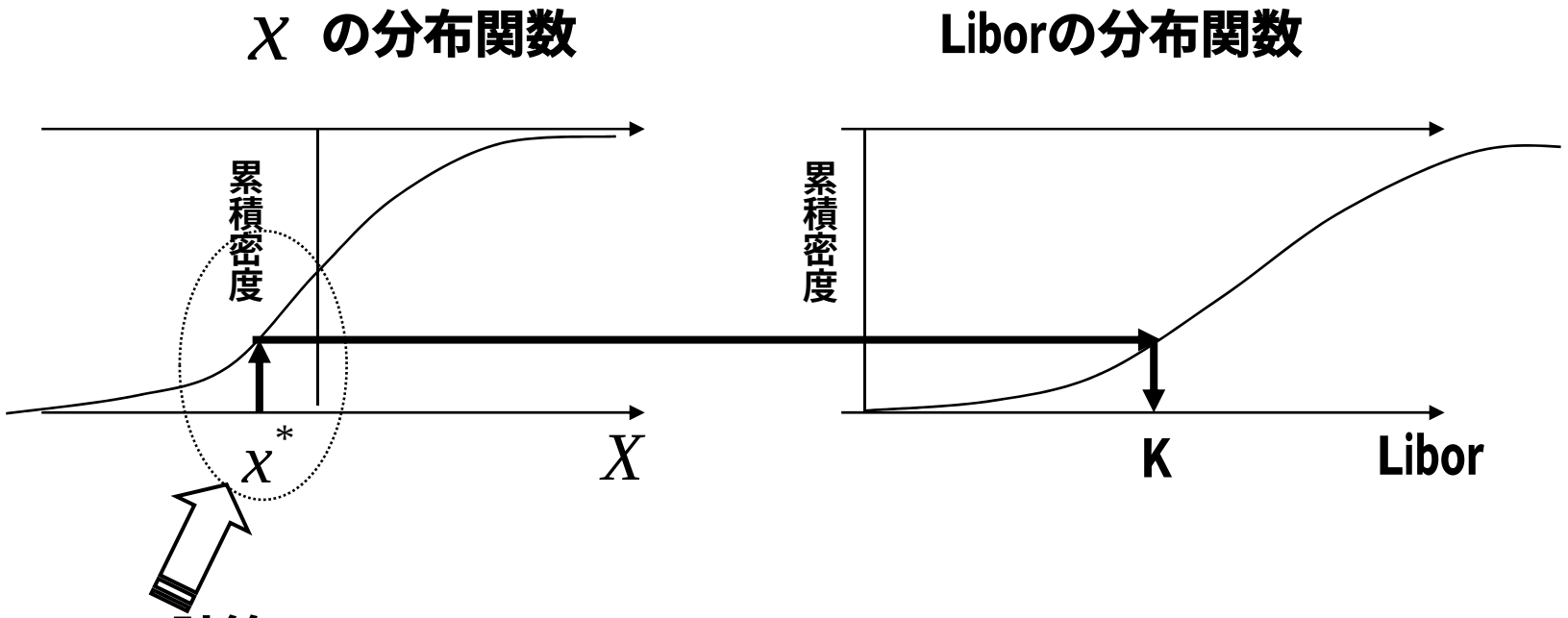
イメージ図　(2)



この計算
＝Markov Functional Model
によるDigital Capletの計算

キャリブレーション　－　ノンパラメトリック法

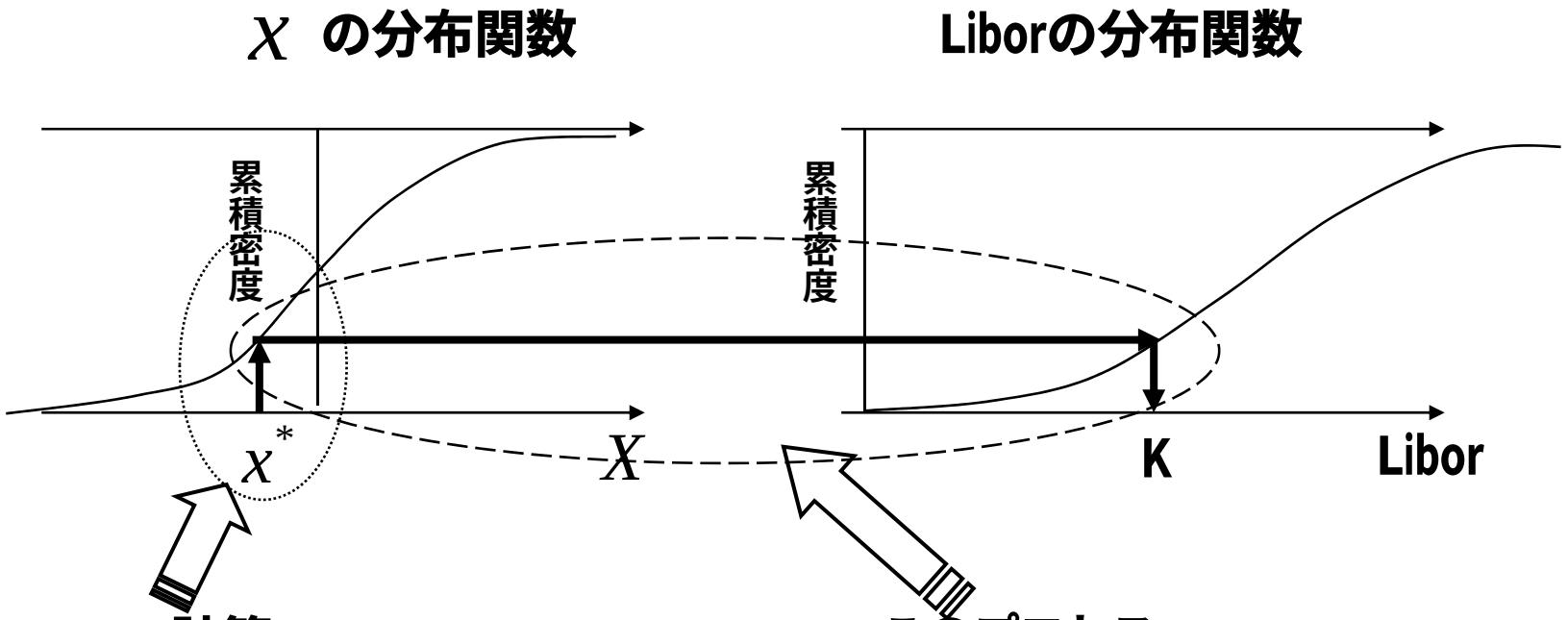
イメージ図　(2)



この計算
＝Markov Functional Model
によるDigital Capletの計算

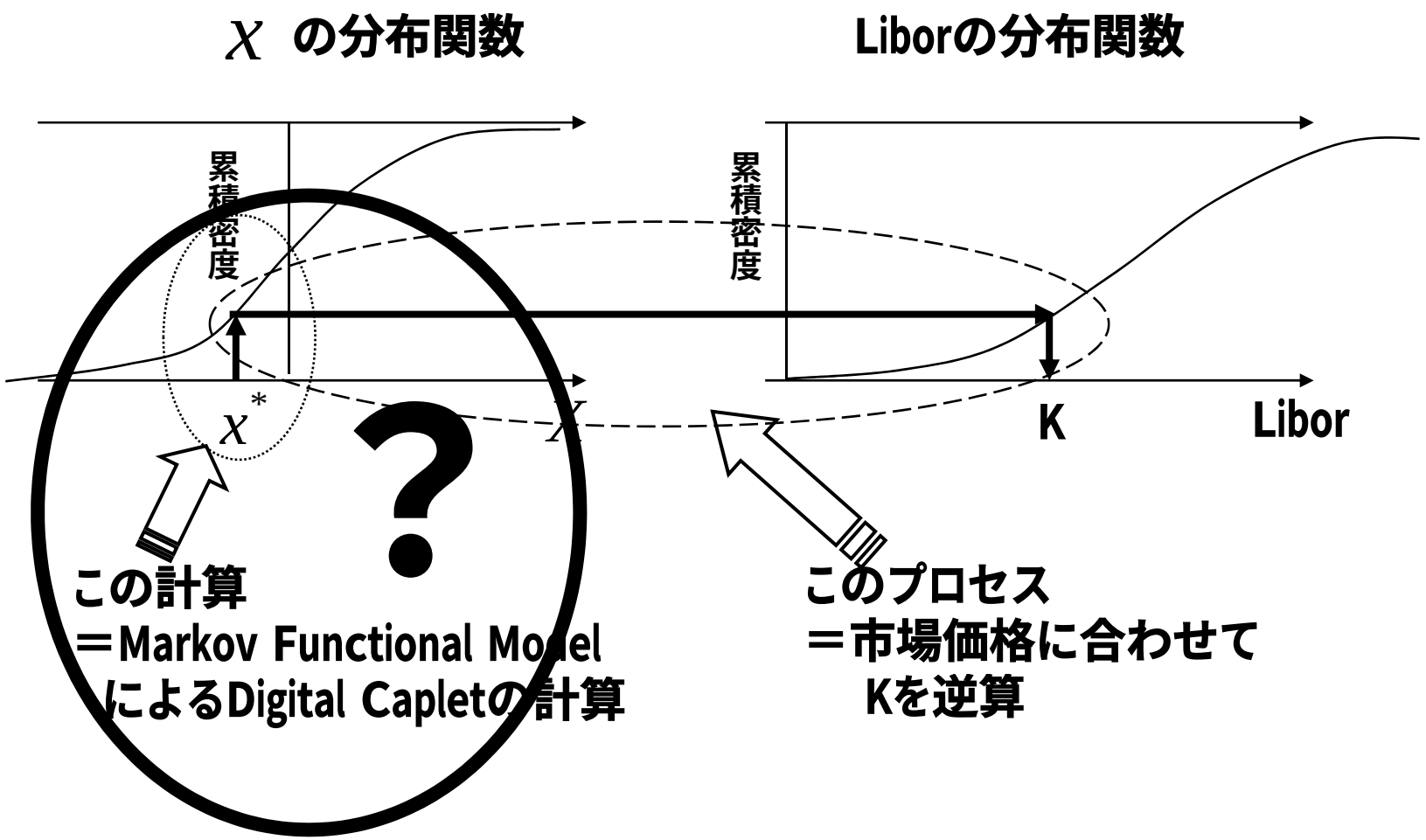
キャリブレーション　－　ノンパラメトリック法

イメージ図　(2)



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

イメージ図　(2)



キャリブレーション　－　ノンパラメトリック法

Markov Functional Interest Rate ModelによるDigital Caplet価格

$$DC_0^{MF}(x_i^*) = P_{0,n}E^{Q_n}\left[1\{X_i > x_i^*\}\frac{P_{i,i+1}(X_i)}{P_{i,n}(X_i)}\right]$$

$$= P_{0,n}E^{Q_n}\left[1\{X_i > x_i^*\}E\left[\frac{1}{P_{i+1,n}(X_{i+1})}\middle| X_i\right]\right]$$

$$= P_{0,n}E^{Q_n}\left[1\{X_i > x_i^*\}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{P_{i+1,n}(x_{i+1})}\phi(x_{i+1}|X_i)dx_{i+1}\right]$$

$$= P_{0,n}\int_{x_i=x_i^*}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{P_{i+1,n}(x_{i+1})}\phi(x_{i+1}|x_i)dx_{i+1}\right)\phi(x_i|x_0)dx_i$$

$$\phi\left(X_{i+1}=x_{i+1}\middle|X_i=x_i\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\int_{T_i}^{T_{i+1}}\sigma^2(u)du}}\exp\left[-\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2\int_{T_i}^{T_{i+1}}\sigma^2(u)du}\right]\quad\phi\left(x_i|x_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\int_{T_0}^{T_i}\sigma^2(u)du}}\exp\left[-\frac{(x_i-x_0)^2}{2\int_{T_0}^{T_i}\sigma^2(u)du}\right]$$

キャリブレーション　－　ノンパラメトリック法

Markov Functional Interest Rate ModelによるDigital Caplet価格

$$DC_0^{MF}(x_i^*) = P_{0,n}E^{Q_n}\left[1\{X_i > x_i^*\}\frac{P_{i,i+1}(X_i)}{P_{i,n}(X_i)}\right]$$

$$= P_{0,n}E^{Q_n}\left[1\{X_i > x_i^*\}E\left[\frac{1}{P_{i+1,n}(X_{i+1})}\middle| X_i\right]\right]$$

基本的に数値
2重積分が必要

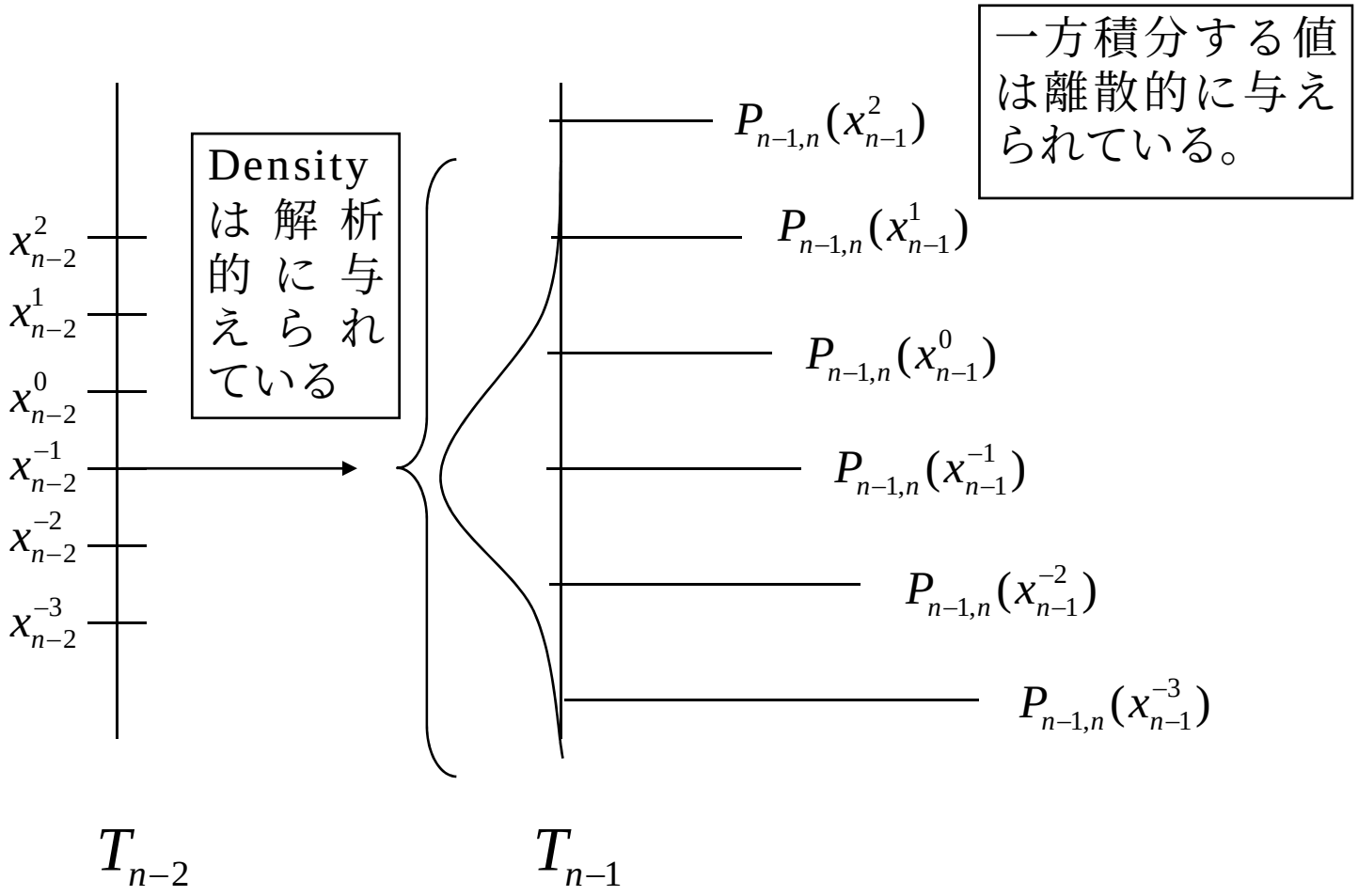
$$= P_{0,n}E^{Q_n}\left[1\{X_i > x_i^*\}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{P_{i+1,n}(x_{i+1})}\phi(x_{i+1}|x_i)dx_{i+1}\right]$$

$$= P_{0,n}\int_{x_i=x_i^*}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{P_{i+1,n}(x_{i+1})}\phi(x_{i+1}|x_i)dx_{i+1}\right)\phi(x_i|x_0)dx_i$$

$$\phi\left(X_{i+1}=x_{i+1}\middle|X_i=x_i\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\int_{T_i}^{T_{i+1}}\sigma^2(u)du}}\exp\left[-\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2\int_{T_i}^{T_{i+1}}\sigma^2(u)du}\right]\quad\phi\left(x_i\middle|x_0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\int_{T_0}^{T_i}\sigma^2(u)du}}\exp\left[-\frac{(x_i-x_0)^2}{2\int_{T_0}^{T_i}\sigma^2(u)du}\right]$$

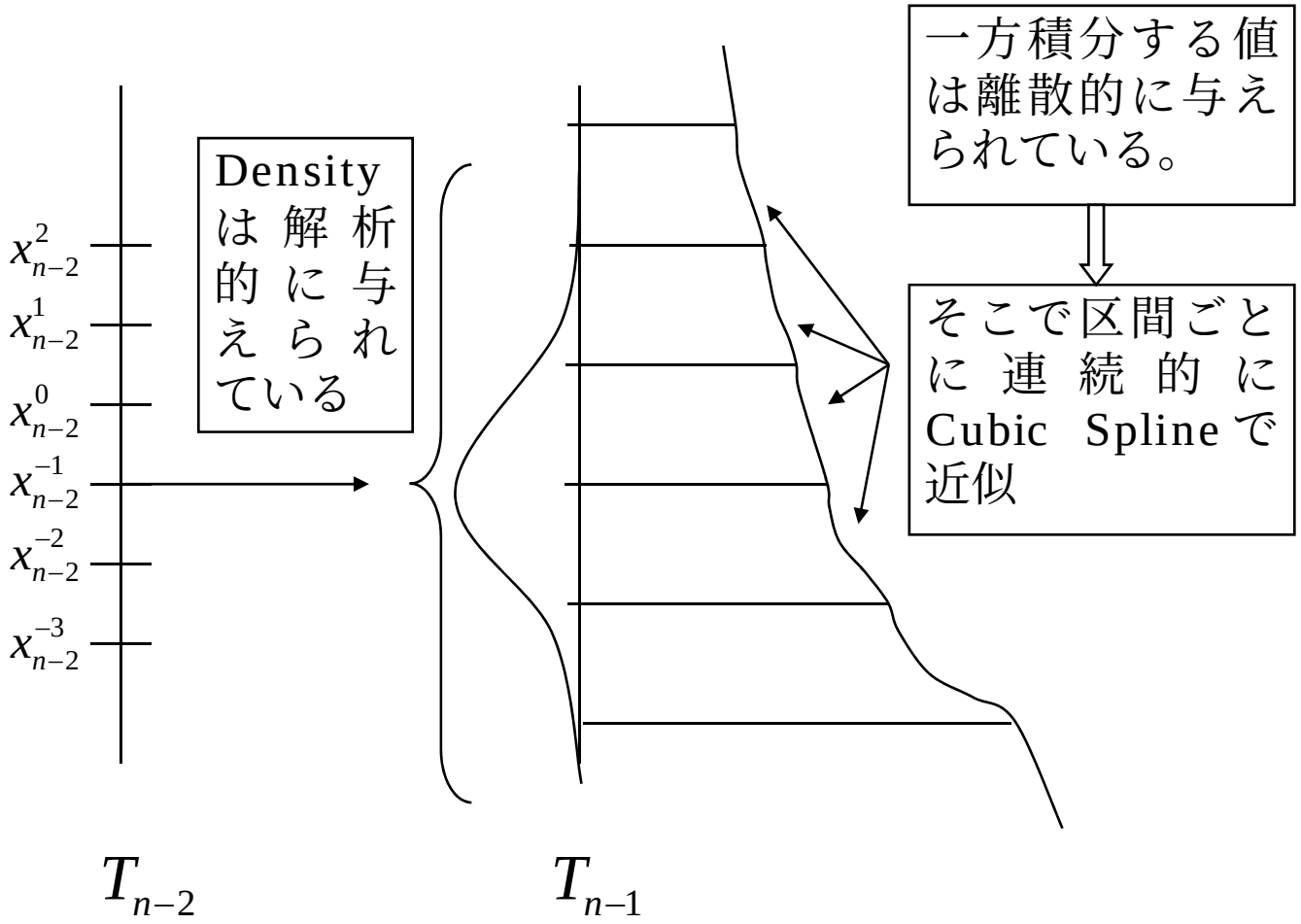
キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

高速かつ滑らかな数値積分



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

高速かつ滑らかな数値積分



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

高速かつ滑らかな数値積分

Piecewise Cubic Spline

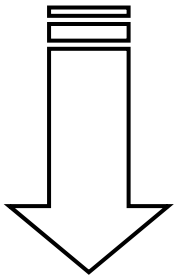
$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_i^j) + c_j(x - x_i^j)^2 + d_j(x - x_i^j)^3$$

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

高速かつ滑らかな数値積分

Piecewise Cubic Spline

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_i^j) + c_j(x - x_i^j)^2 + d_j(x - x_i^j)^3$$



項ごとにGaussian Density**で積分**

$$\int_{x_i^j}^{x_i^{j+1}} S_j(x)\phi(x)dx = a_j \int_{x_i^j}^{x_i^{j+1}} \phi(x)dx + b_j \int_{x_i^j}^{x_i^{j+1}} (x - x_i^j)\phi(x)dx$$

$$+ c_j \int_{x_i^j}^{x_i^{j+1}} (x - x_i^j)^2 \phi(x)dx + d_j \int_{x_i^j}^{x_i^{j+1}} (x - x_i^j)^3 \phi(x)dx$$

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

高速かつ滑らかな数値積分

求めたい基本的な式の形

$$I_n(l,h,\mu,\sigma^2) = \int_l^h x^n \phi(x,\mu,\sigma^2)dx$$

$$= \int_l^h x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Cubic Splineより n=0,1,2,3のケースが必要

ガウシアンなファクター分布の仮定より

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

高速かつ滑らかな数値積分

積の微分公式より

$$\frac{d}{dx}(x^m\phi(x,\mu,\sigma^2)) = mx^{m-1}\phi(x,\mu,\sigma^2) + x^m\frac{d}{dx}\phi(x,\mu,\sigma^2)$$

$$= mx^{m-1}\phi(x,\mu,\sigma^2) - \frac{(x-\mu)}{\sigma^2}x^m\phi(x,\mu,\sigma^2)$$

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

高速かつ滑らかな数値積分

積の微分公式より

$$\frac{d}{dx}(x^m\phi(x,\mu,\sigma^2)) = mx^{m-1}\phi(x,\mu,\sigma^2) + x^m\frac{d}{dx}\phi(x,\mu,\sigma^2)$$

$$= mx^{m-1}\phi(x,\mu,\sigma^2) - \frac{(x-\mu)}{\sigma^2}x^m\phi(x,\mu,\sigma^2)$$

漸化式　(上の式の両辺を積分)

$$I_n(l,h,\mu,\sigma^2) = \sigma^2(n-1)I_{n-2}(l,h,\mu,\sigma^2)$$

$$+ I_{n-1}(l,h,\mu,\sigma^2)$$

$$+ \sigma^2\left(l^{n-1}\phi(l,\mu,\sigma^2) - h^{n-1}\phi(h,\mu,\sigma^2)\right)$$

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

高速かつ滑らかな数値積分

3次までの具体式　(Cubic Splineに必要なところまで)

$$I_0(l,h,\mu,\sigma^2) = \Phi\left(\frac{h-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)$$

$$I_1(l,h,\mu,\sigma^2) = \mu\left(\Phi\left(\frac{h-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)\right) + \sigma^2\left(\phi(l,\mu,\sigma^2) - \phi(h,\mu,\sigma^2)\right)$$

$$I_2(l,h,\mu,\sigma^2) = \left(\Phi\left(\frac{h-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)\right)\left(\sigma^2+\mu\right) + \sigma^2\left((1+l)\phi(l,\mu,\sigma^2) - (1+h)\phi(h,\mu,\sigma^2)\right)$$

$$I_3(l,h,\mu,\sigma^2) = \left(\Phi\left(\frac{h-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{l-\mu}{\sigma}\right)\right)\left(\mu\sigma^2+\sigma^2+\mu\right)$$
$$+\sigma^2\left(\sigma^2+1+l+l^2\right)\phi(l,\mu,\sigma^2) - \sigma^2\left(\sigma^2+1+h+h^2\right)\phi(h,\mu,\sigma^2)$$

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

市場のBS式を通じたDigital Option価格のQuotation

求まった

$$\boxed{DC_0^{MKT}(K)} = P_{0,i+1} N\left(\frac{\ln\left(\frac{L_{0,i,i+1}}{K} \right) - \frac{1}{2}\sigma_i^2 T_i}{\sigma_i \sqrt{T_i}} \right)$$

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

市場のBS式を通じたDigital Option価格のQuotation

求まった

$$DC_0^{MKT}(K) = P_{0,i+1} N\left(\frac{\ln\left(\frac{L_{0,i,i+1}}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma_i^2 T_i}{\sigma_i \sqrt{T_i}} \right)$$

数値微分が必要

Smileが存在する場合（VolがKに依存）

求まった

$$DC_0^{MKT}(K) = P_{0,i+1}\left[\Phi(d_-) - L_{0,i,i+1}\phi(d_+)\sqrt{T_i}\frac{\partial\sigma(K)}{\partial K} \right]$$

$$d_- = \frac{\ln\left(\frac{L_{0,i,i+1}}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(K)T_i}{\sigma(K)\sqrt{T_i}} \qquad d_+ = \frac{\ln\left(\frac{L_{0,i,i+1}}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(K)T_i}{\sigma(K)\sqrt{T_i}}$$

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

Vol Smileが無い場合は、、、

$$K^{*} = L_{0,i,i+1} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\sigma_i^2 T -_i \sigma_i \sqrt{T_i} N^{-1}\left(\frac{1}{P_{0,i+1}} DC_0^{MF}(x_i^{*}) \right) \right\}$$

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

Vol Smileが無い場合は、、、

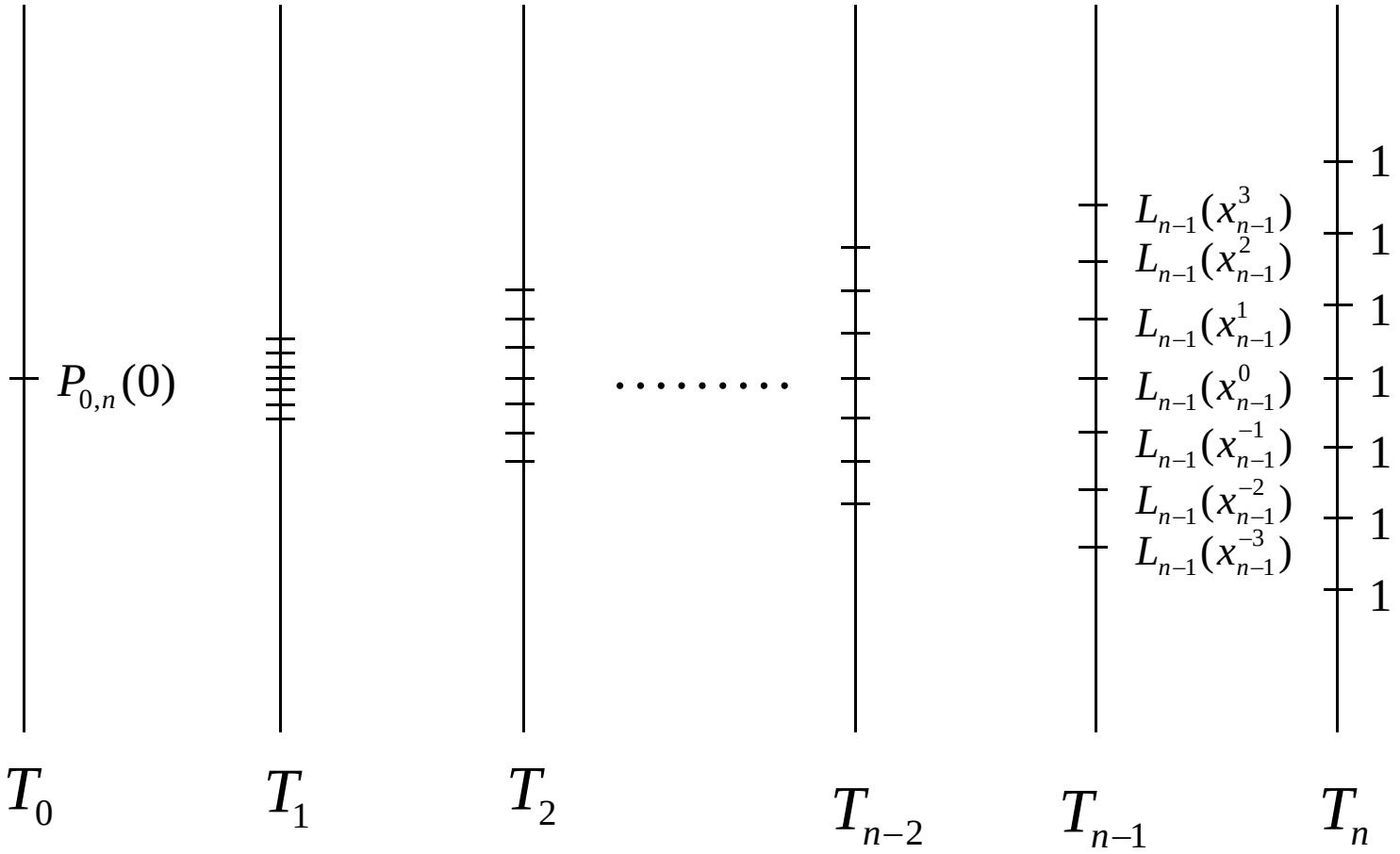
$$K^{*} = L_{0,i,i+1} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\sigma_i^2 T -_i \sigma_i \sqrt{T_i} N^{-1}\left(\frac{1}{P_{0,i+1}} DC_0^{MF}(x_i^{*}) \right) \right\}$$

Vol Smileがある場合は、数値計算

Kを動かしてMarkov Functional Modelの
理論値とあわせるだけ

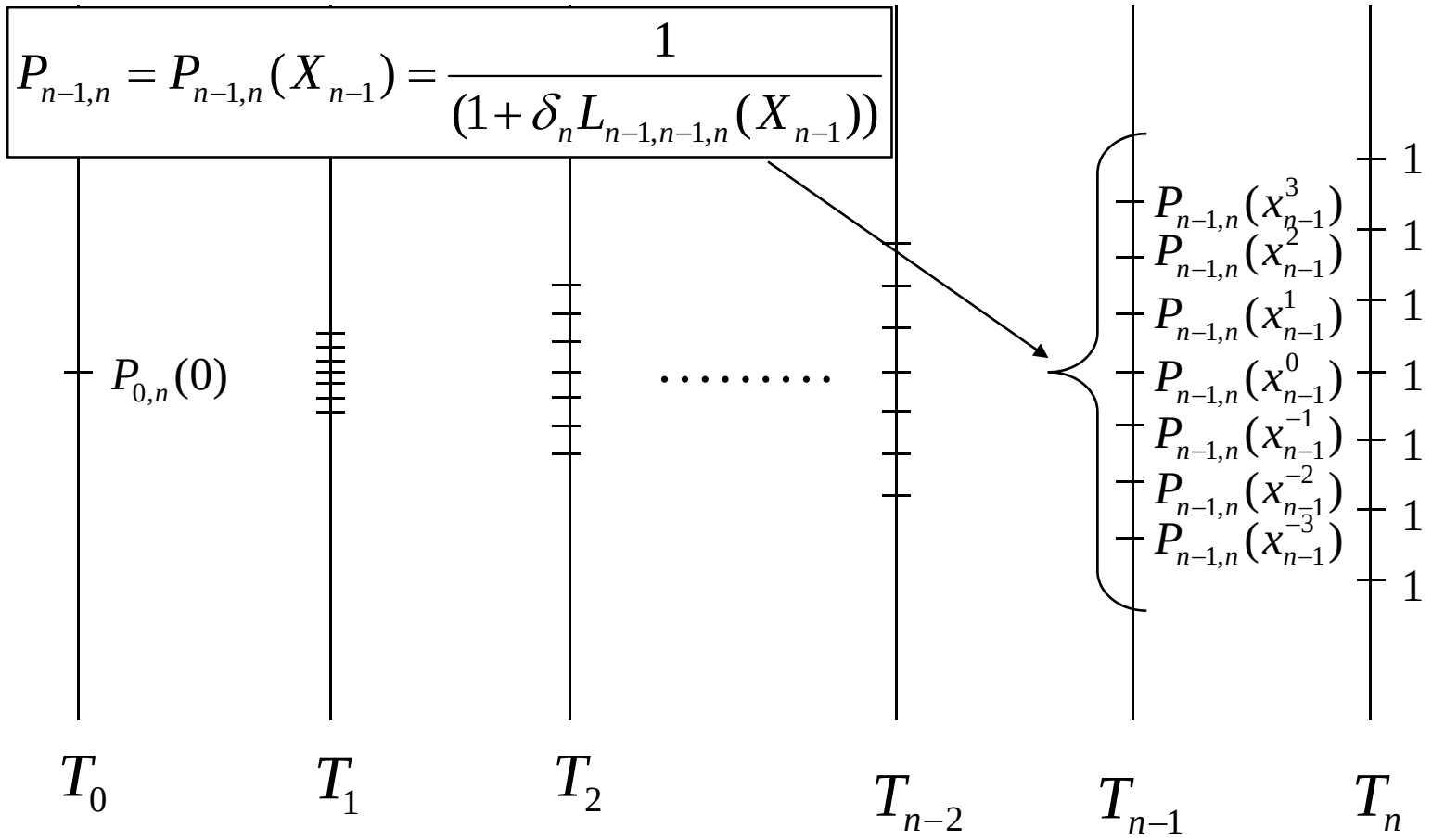
キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

$L_{n-1}(X_{n-1})$ **が求まった**



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

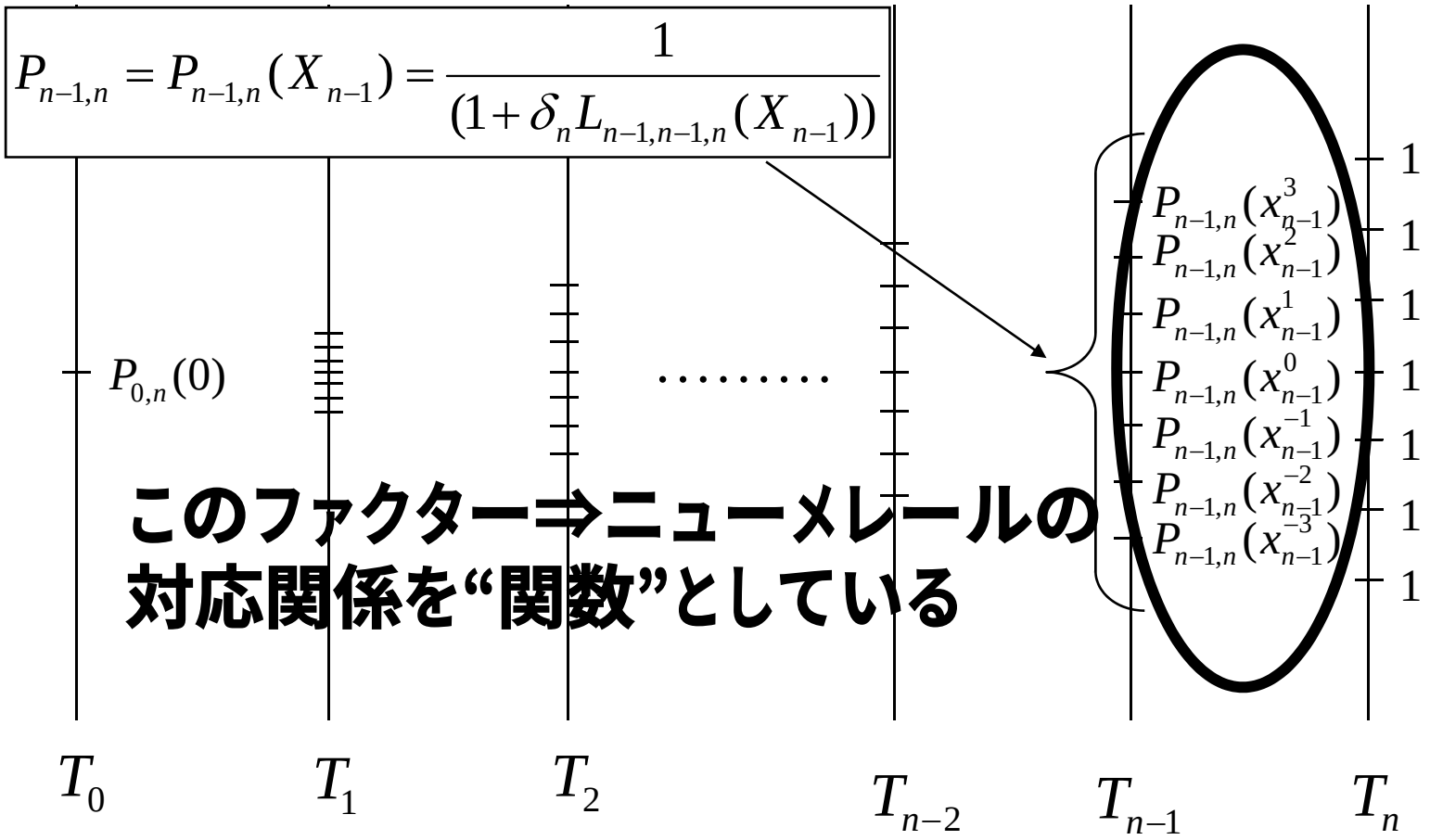
$L_{n-1}(X_{n-1})$ から $P_{n-1,n}(X_{n-1})$ を求める



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

$L_{n-1}(X_{n-1})$ から $P_{n-1,n}(X_{n-1})$ を求める

$$P_{n-1,n} = P_{n-1,n}(X_{n-1}) = \frac{1}{(1+\delta_n L_{n-1,n-1,n}(X_{n-1}))}$$

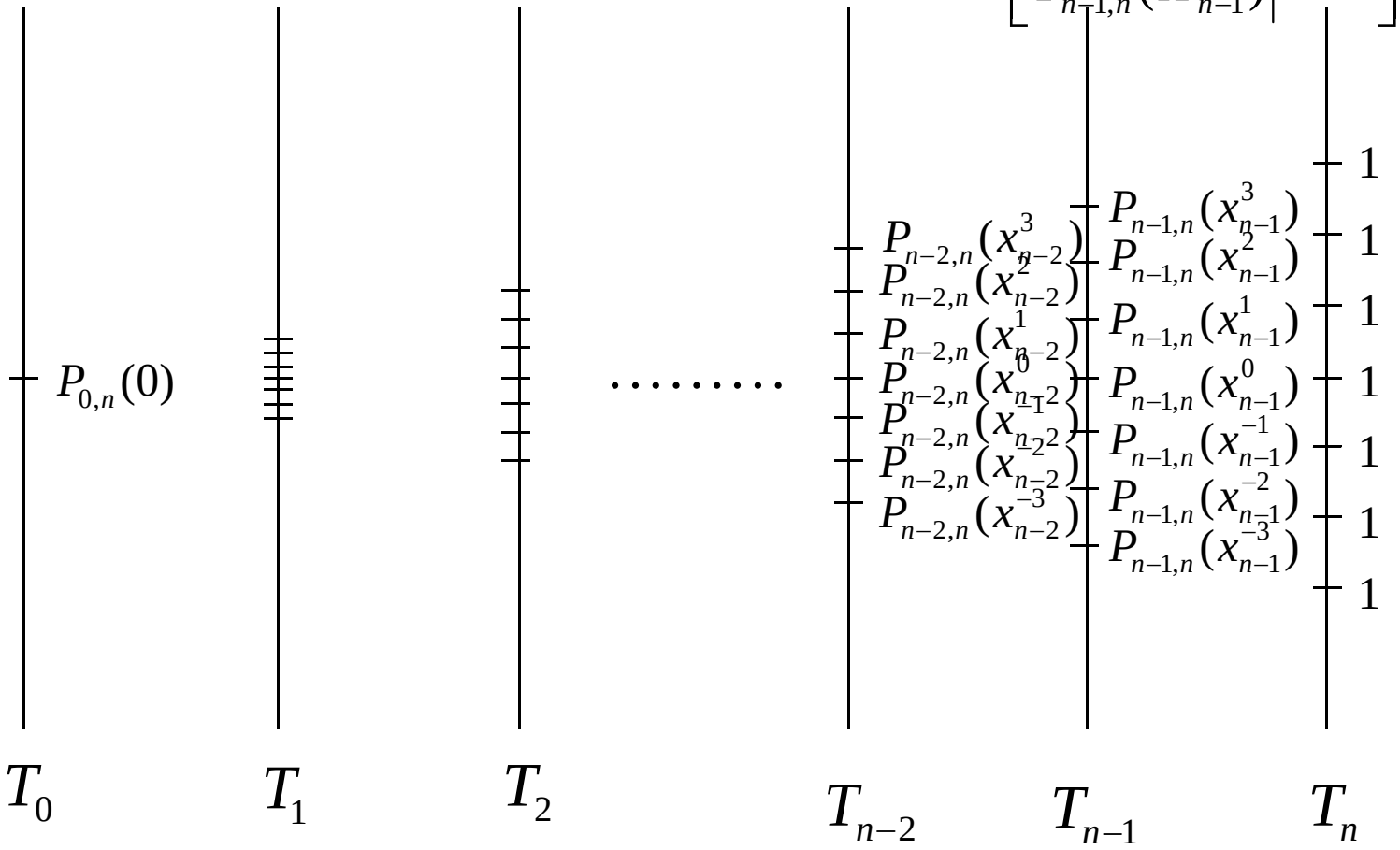


このファクター⇒ニューメレールの対応関係を“関数”としている

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

$$P_{n-2,n} = P_{n-2,n}(X_{n-2}) = \frac{1}{(1+\delta_{n-2}L_{n-2,n-2,n-1}(X_{n-2}))E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{n-1,n}(X_{n-1})}\right| X_{n-2}\right]}$$

次の期へ、、、



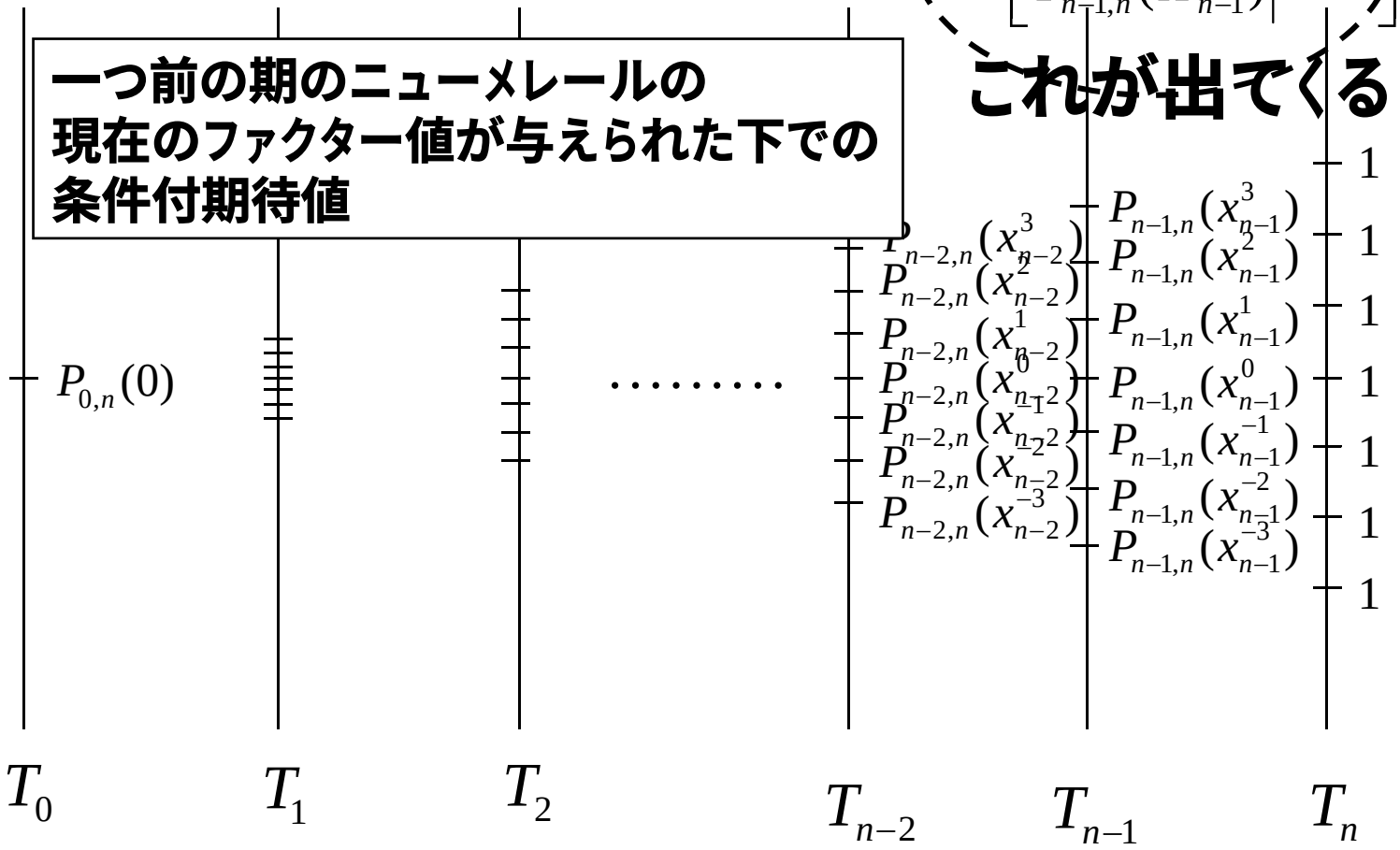
キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

$$P_{n-2,n} = P_{n-2,n}(X_{n-2}) = \frac{1}{(1+\delta_{n-2}L_{n-2,n-2,n-1}(X_{n-2}))E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{n-1,n}(X_{n-1})}\right| X_{n-2}\right]}$$

次の期へ、、、

これが出てくる

一つ前の期のニューメレールの
現在のファクター値が与えられた下での
条件付期待値



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

$$P_{n-2,n} = P_{n-2,n}(X_{n-2}) = \frac{1}{(1+\delta_{n-2}L_{n-2,n-2,n-1}(X_{n-2}))E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{n-1,n}(X_{n-1})}\right| X_{n-2}\right]}$$

次の期へ、、、

一つ前の期のニューメレールの現在のファクター値が与えられた下での条件付期待値

これが出てくる

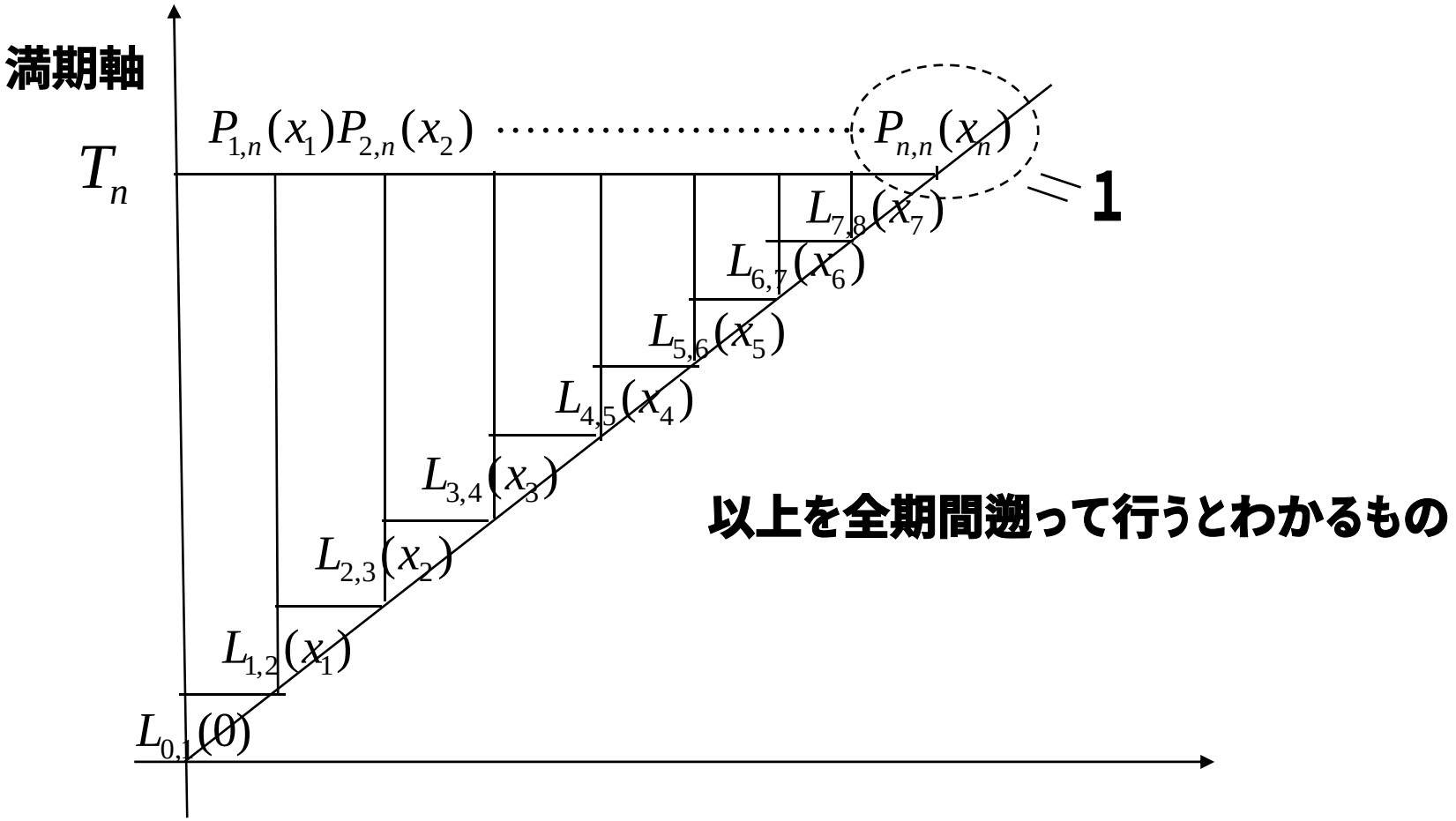
$$DC_0^{MF}(x_i^*) = P_{0,n}E^{Q_n}\left[1\{X_i > x_i^*\}\frac{P_{i,i+1}(X_i)}{P_{i,n}(X_i)}\right]$$

$$= P_{0,n}E^{Q_n}\left[1\{X_i > x_i^*\}E\left[\left.\frac{1}{P_{i+1,n}(X_{i+1})}\right| X_i\right]\right]$$

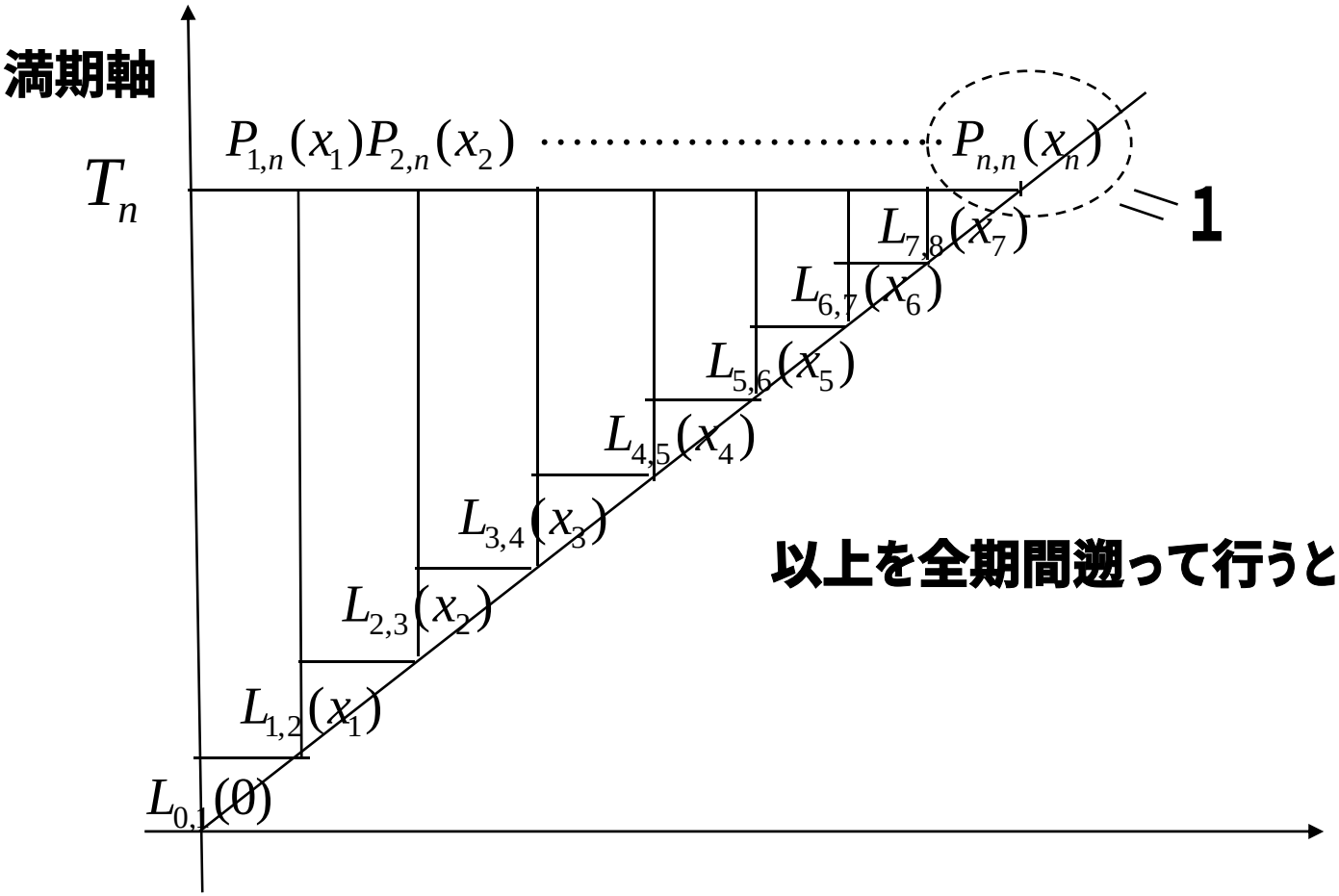
$P_{n-1,n}(x_{n-1}^3)$ 1
$P_{n-1,n}(x_{n-1}^2)$ 1
$P_{n-1,n}(x_{n-1}^1)$ 1
$P_{n-1,n}(x_{n-1}^0)$ 1
$P_{n-1,n}(x_{n-1}^{-1})$ 1
$P_{n-1,n}(x_{n-1}^{-2})$ 1
$P_{n-1,n}(x_{n-1}^{-3})$ 1

T_0 T_1 T_2 T_{n-2} T_{n-1} T_n

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

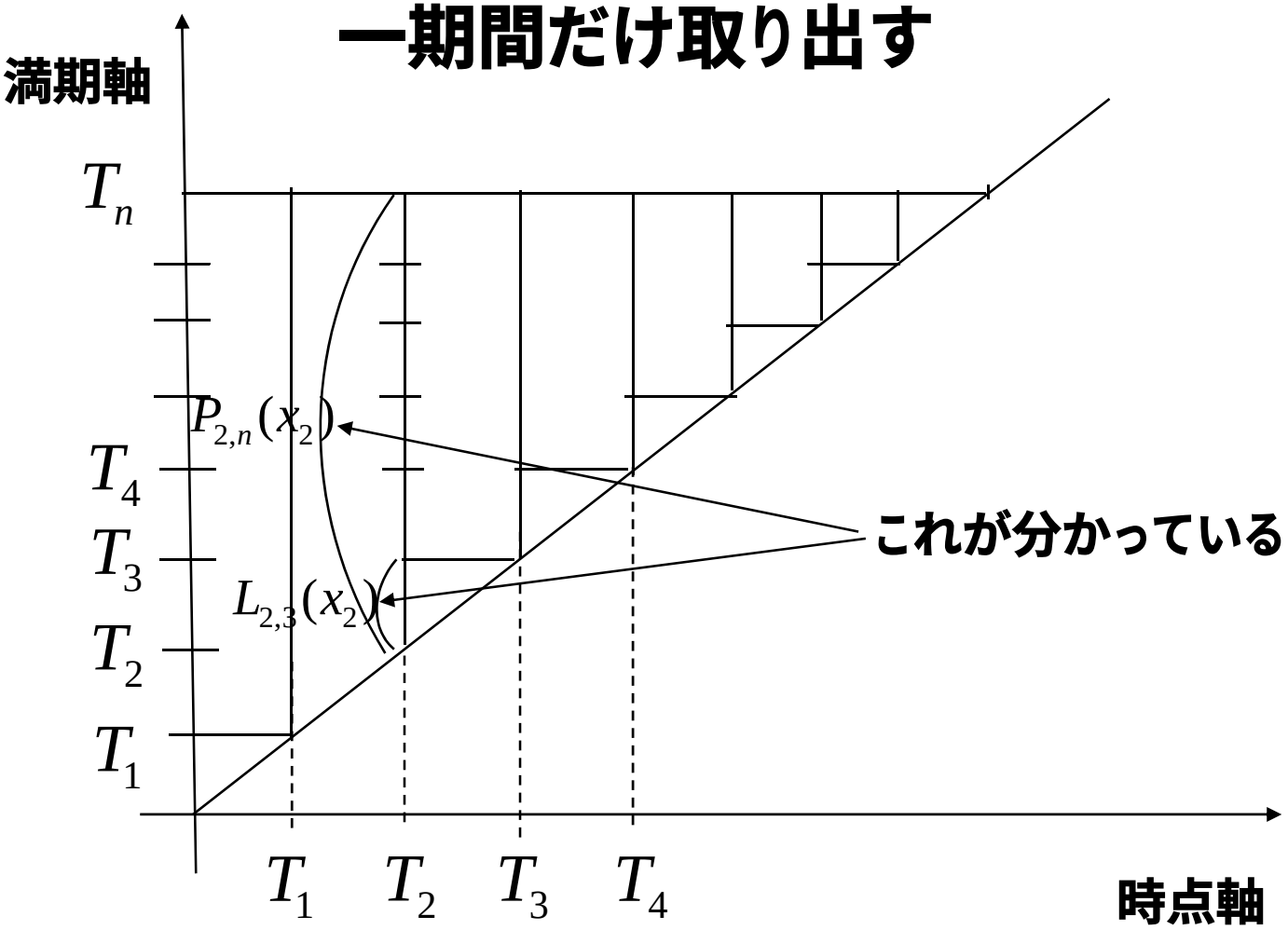


以上を全期間遡って行うとわかるもの

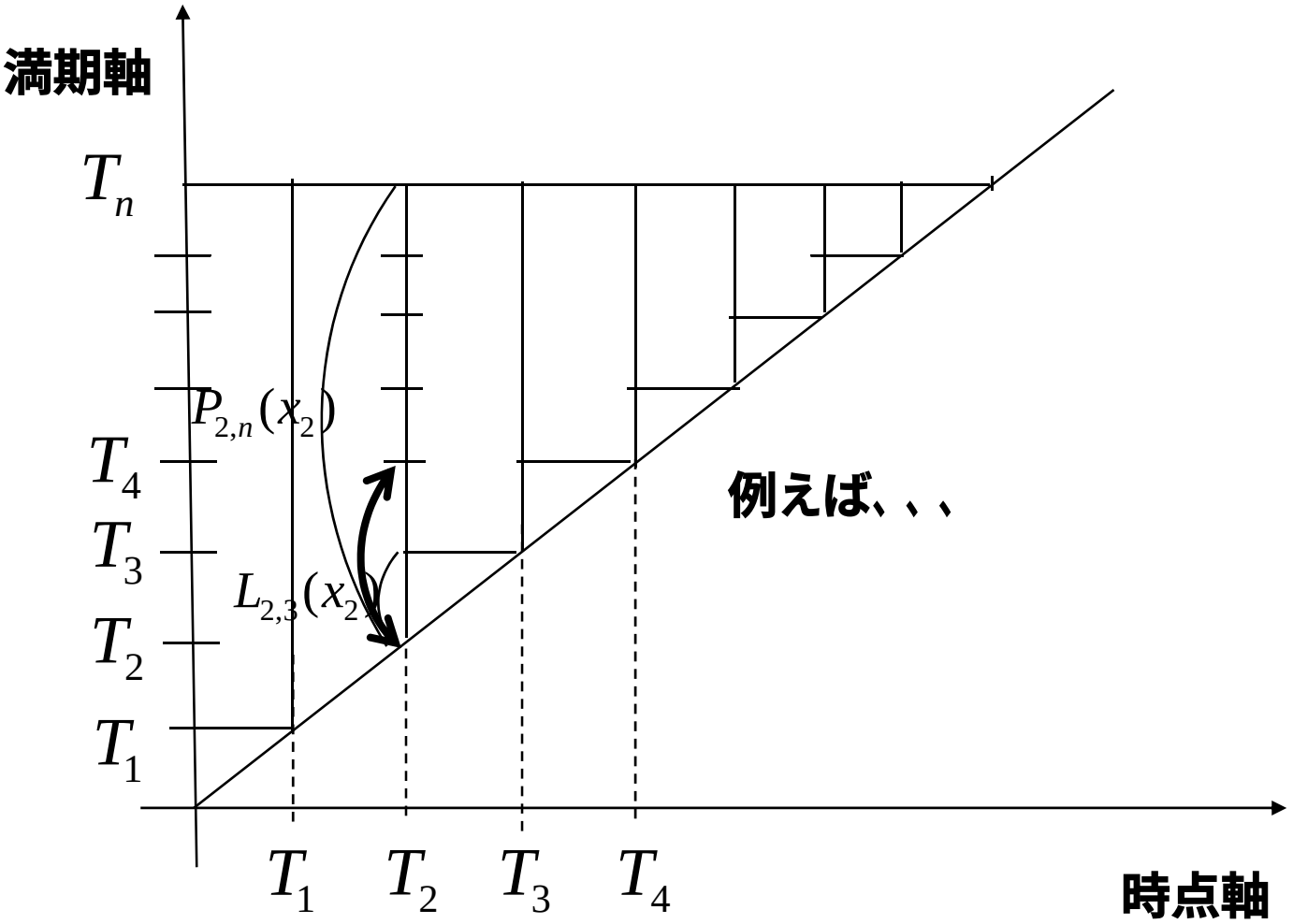
あとは他の満期の債券を求めてイールドカーブを引くだけ

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

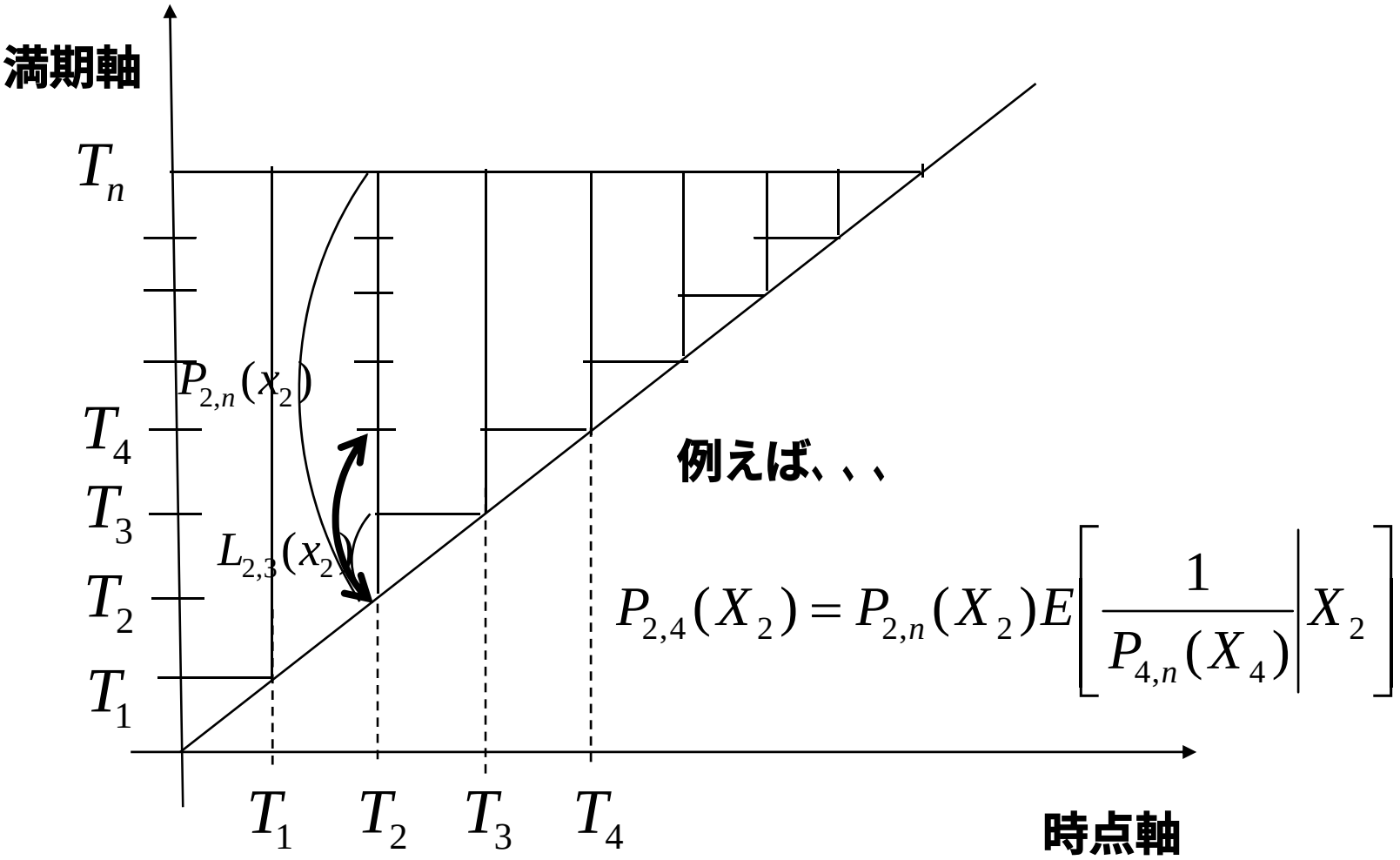
ー期間だけ取り出す



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法



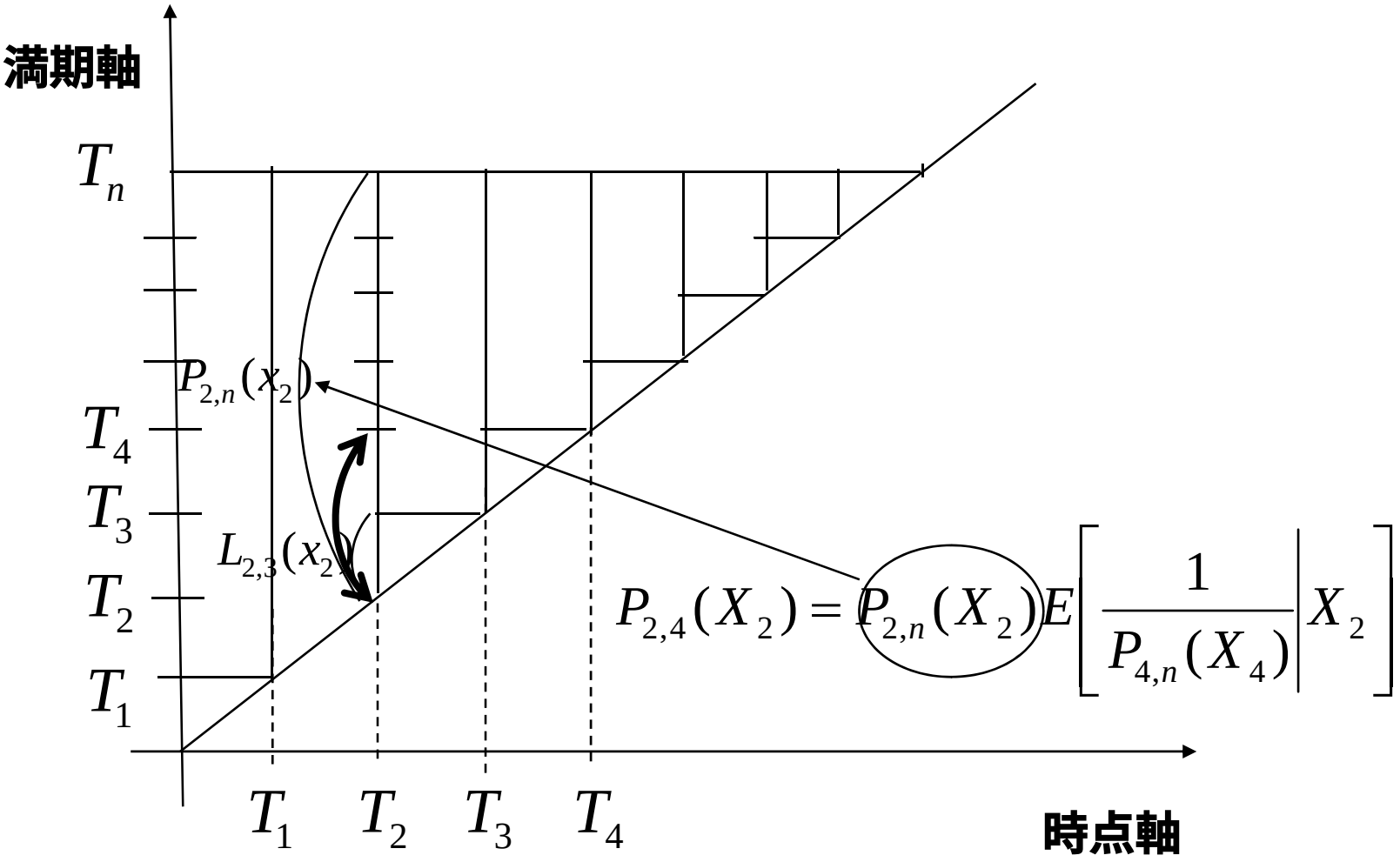
キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法



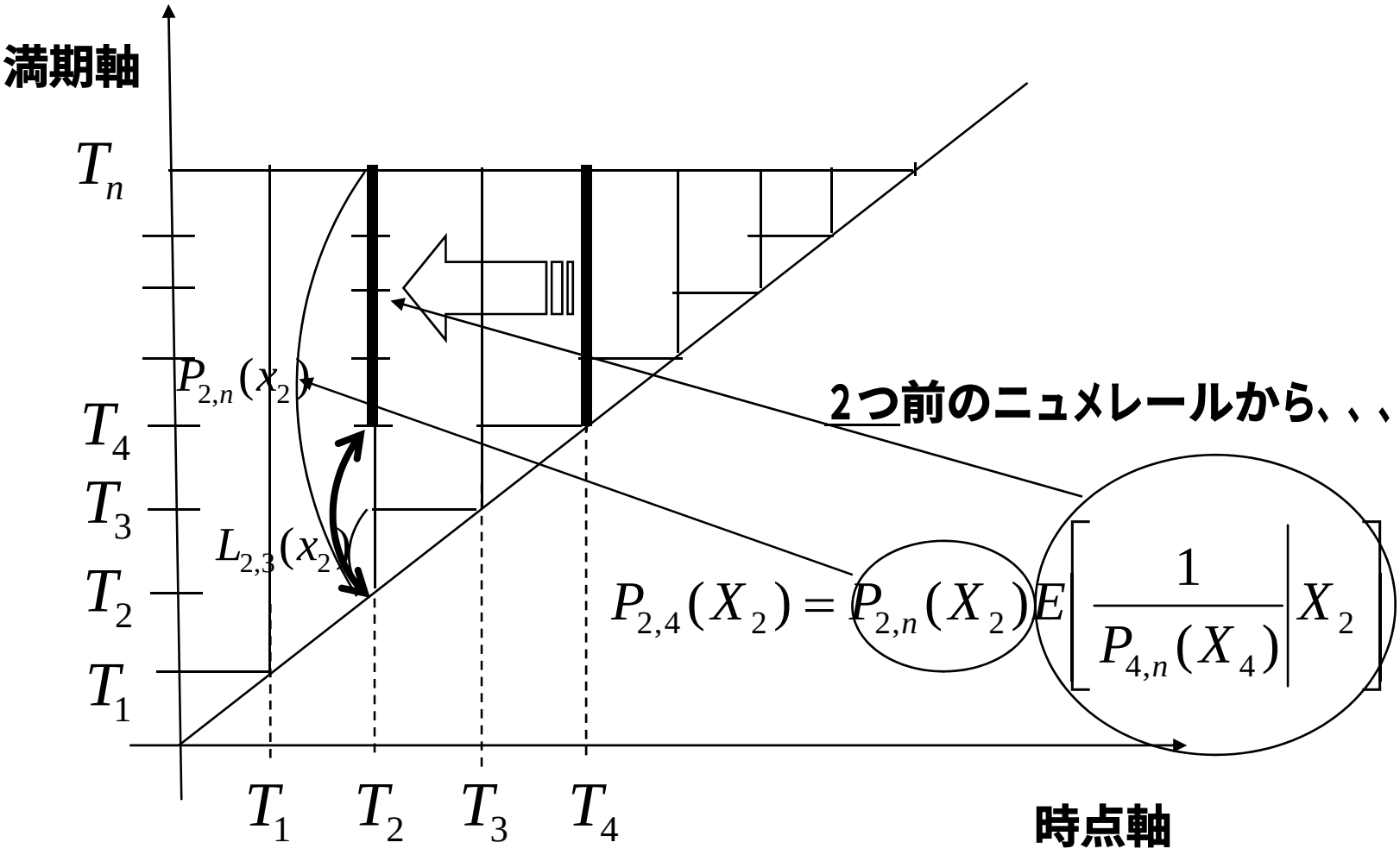
例えば、、、

$$P_{2,4}(X_2) = P_{2,n}(X_2)E\left[\frac{1}{P_{4,n}(X_4)}\middle| X_2\right]$$

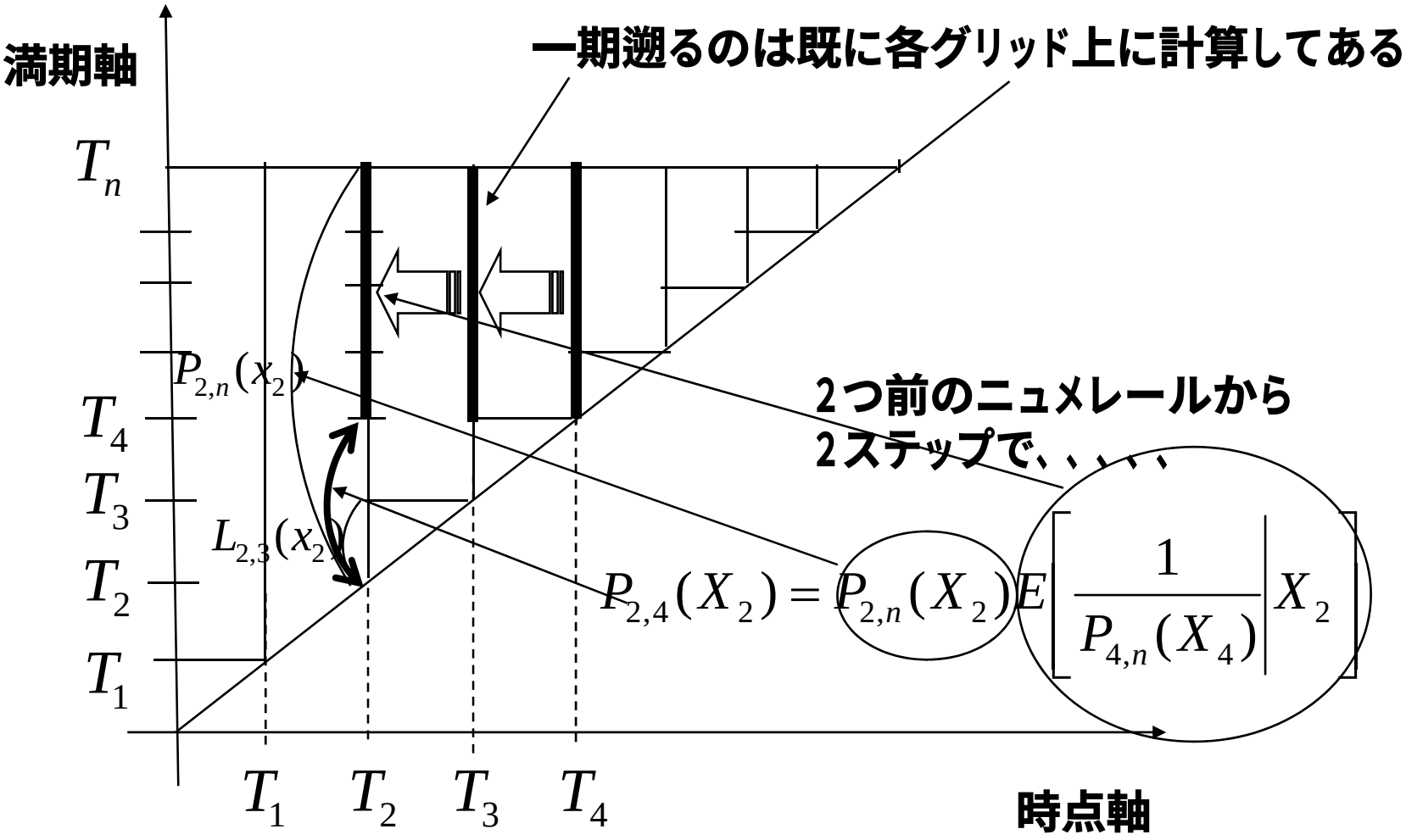
キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

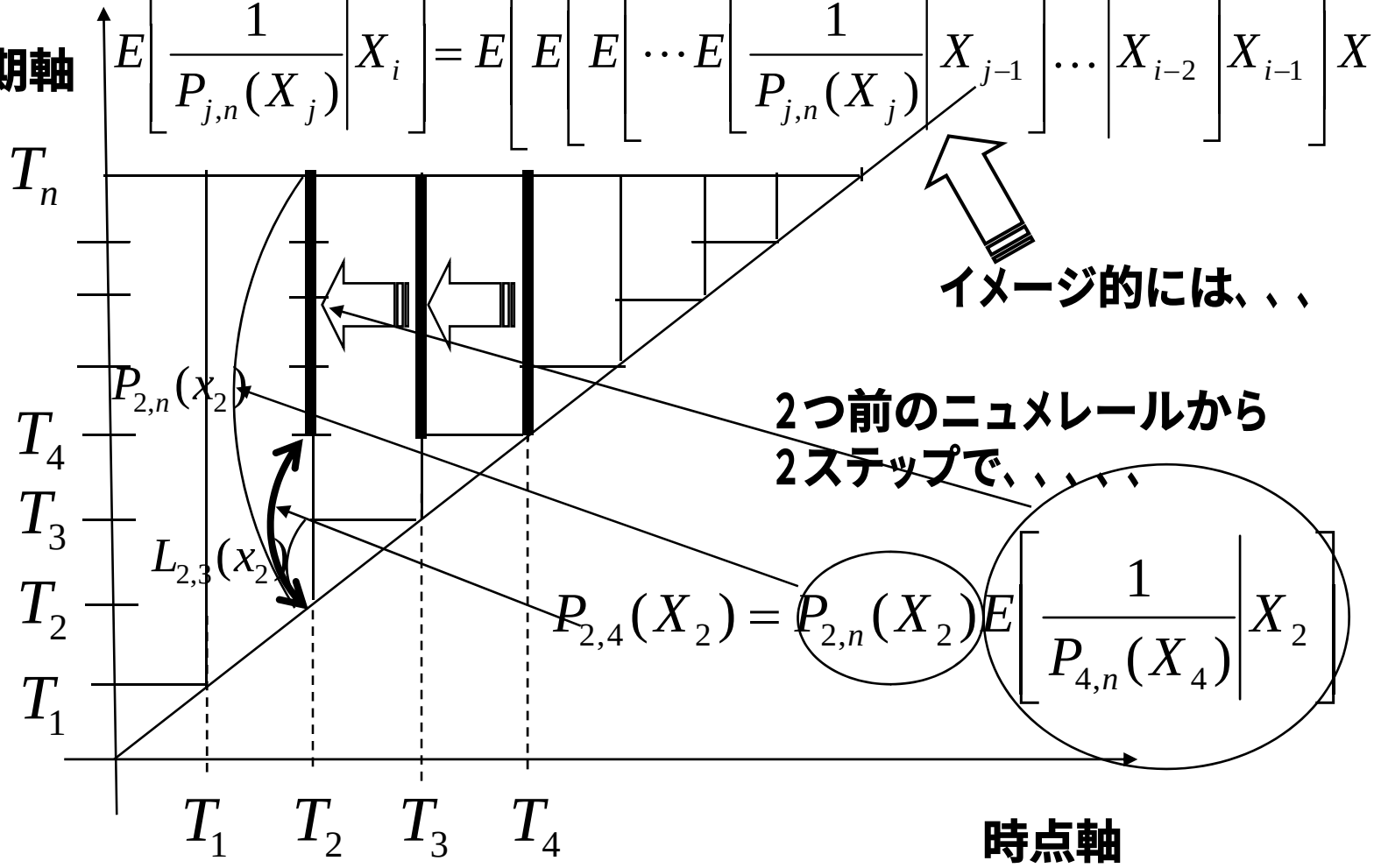


キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法



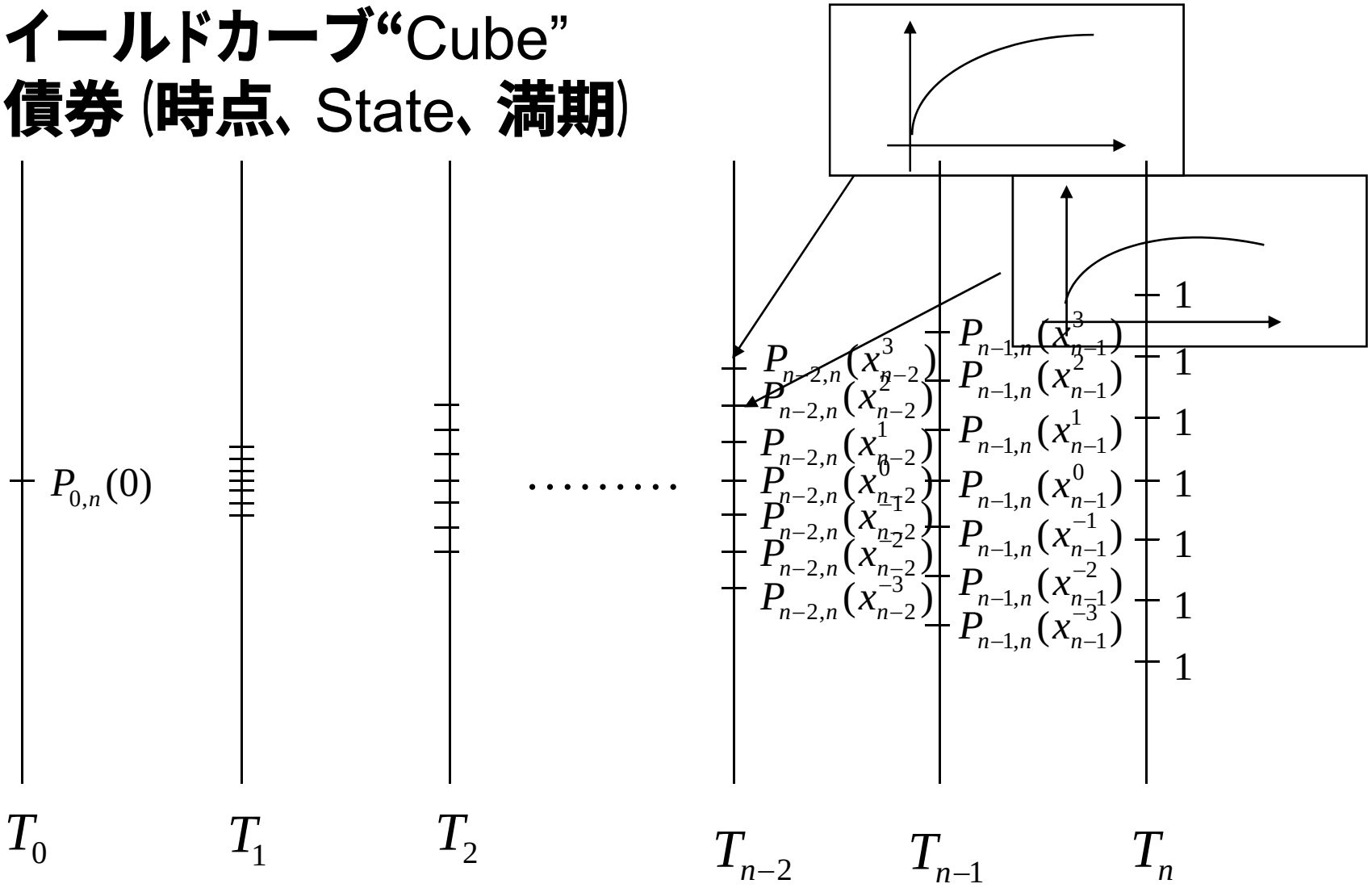
キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

$$E\left[\left.\frac{1}{P_{j,n}(X_j)}\right|X_i\right]=E\left[E\left[E\left[\cdots E\left[\left.\frac{1}{P_{j,n}(X_j)}\right|X_{j-1}\right]\cdots\right|X_{i-2}\right]X_{i-1}\right]X_i\right]$$



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

イールドカーブ“Cube”
債券 (時点、State、**満期)**



キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

小さくて、単純な、具体例

全てのプロセス、中間値、を表示

Time Spacing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Standardized Space Spacing

	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0	-1.0
	-2.0	-2.0	-2.0	-2.0	-2.0	-2.0	-2.0	-2.0	-2.0	-2.0

State Spacing : Brownian Motion (X(t)) Grid Point

	X(0)	X(1)	X(2)	X(3)	X(4)	X(5)	X(6)	X(7)	X(8)	X(9)	X(10)
2.0		2.000	2.828	3.464	4.000	4.472	4.899	5.292	5.657	6.000	6.325
1.0		1.000	1.414	1.732	2.000	2.236	2.449	2.646	2.828	3.000	3.162
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-1.0		-1.000	-1.414	-1.732	-2.000	-2.236	-2.449	-2.646	-2.828	-3.000	-3.162
-2.0		-2.000	-2.828	-3.464	-4.000	-4.472	-4.899	-5.292	-5.657	-6.000	-6.325

Numeraire N(X(t))

	N(0,X(0)) =P(0,10)	N(1,X(1)) =P(1,10)	N(2,X(2)) =P(2,10)	N(3,X(3)) =P(3,10)	N(4,X(4)) =P(4,10)	N(5,X(5)) =P(5,10)	N(6,X(6)) =P(6,10)	N(7,X(7)) =P(7,10)	N(8,X(8)) =P(8,10)	N(9,X(9)) =P(9,10)	N(10,X(10)) =P(10,10)
2.0		0.5892	0.6033	0.6270	0.6578	0.6953	0.7396	0.7914	0.8512	0.9199	1.0000
1.0		0.6172	0.6416	0.6713	0.7053	0.7432	0.7852	0.8316	0.8828	0.9394	1.0000
0.0	0.6122	0.6450	0.6792	0.7145	0.7510	0.7886	0.8275	0.8680	0.9102	0.9544	1.0000
-1.0		0.6709	0.7126	0.7512	0.7884	0.8246	0.8602	0.8955	0.9307	0.9658	1.0000
-2.0		0.6942	0.7408	0.7808	0.8173	0.8515	0.8840	0.9152	0.9453	0.9744	1.0000

0.61391

Inverse of Numeraire 1/N(X(t))

	1/N(0,X(0))	1/N(1,X(1))	1/N(2,X(2))	1/N(3,X(3))	1/N(4,X(4))	1/N(5,X(5))	1/N(6,X(6))	1/N(7,X(7))	1/N(8,X(8))	1/N(9,X(9))	1/N(10,X(10))
2.0		1.6973	1.6574	1.5949	1.5202	1.4383	1.3520	1.2636	1.1748	1.0871	1.0000
1.0		1.6203	1.5587	1.4896	1.4178	1.3455	1.2735	1.2025	1.1328	1.0645	1.0000
0.0		1.5504	1.4723	1.3995	1.3316	1.2681	1.2084	1.1521	1.0987	1.0478	1.0000
-1.0		1.4906	1.4034	1.3311	1.2684	1.2128	1.1625	1.1167	1.0745	1.0354	1.0000
-2.0		1.4405	1.3499	1.2808	1.22	1.1745	1.1313	1.0927	1.0579	1.0262	1.0000

Conditional Expectation E[1/P(i+1)|X(i)]

2.0		1.6001	1.5553	1.4911	1	1.3364	1.2528	1.1679	1.0832	1.0000	
1.0		1.5354	1.4740	1.4064	369	1.2672	1.1980	1.1300	1.0633	1.0	
0.0	1.5557	1.4768	1.4027	1.3336	692	1.2089	1.1521	1.0985	1.0477	1.00	
-1.0		1.4261	1.3451	1.2777	2189	1.1666	1.1192	1.0760	1.0361	1.0000	
-2.0		1.3825	1.2993	1.2353	1822	1.1364	1.0960	1.0599	1.0272	1.0000	

Theoretical Digital Caplet Price by Markov Func al Model

2.0		0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0140	
1.0		0.1302	0.1256	0.120	0.1140	0.1079	0.1017	0.0955	0.0893	0.0974	
0.0		0.4453	0.4262	0.40	0.3861	0.3664	0.3472	0.3284	0.3102	0.3070	
-1.0		0.7499	0.7143	0.6	0.6468	0.6152	0.5850	0.5562	0.5285	0.5165	
-2.0		0.8674	0.8250	0.7	0.7472	0.7115	0.6776	0.6454	0.6147	0.5999	
	0.9524	0.9070	0.8638	0	0.7835	0.7462	0.7107	0.6768	0.6446	0.6139	← 満期+1のDiscount Factor

Corresponding Libor (Strike) Level

2.0		6.0766%	6.5685%		7.3114%	7.6267%	7.9196%	8.1959	8.4581%	8.7097%
1.0		5.5340%	5.7481%		6.0532%	6.1809%	6.3012%	6.417	6.5327%	6.4523%
0.0	5.0000%	4.9864%	4.9619%		4.9186%	4.9011%	4.8866%	4.87	4.8682%	4.7800%
-1.0		4.5281%	4.3327%	%	4.0639%	3.9589%	3.8661%	3.7	3.7085%	3.5411%
-2.0		4.1931%	3.8944%	5%	3.5014%	3.3501%	3.2161%	3.0	2.9867%	2.6233%

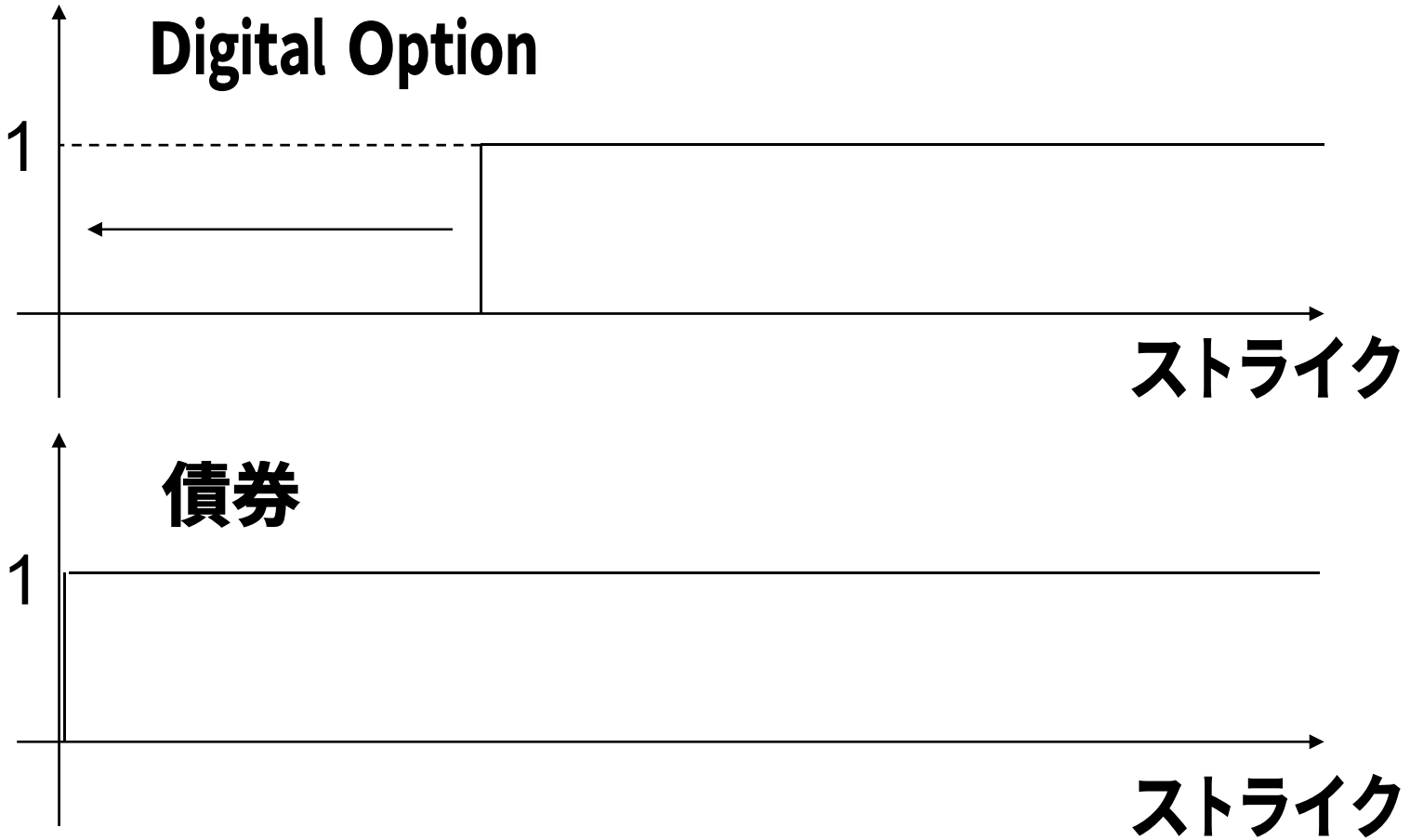
この二つは内側の積分に対応

最終的に Libor と条件付期待値からニューメレールが求まる

この二つは外側の積分に対応

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

期初の債券価格へのキャリブレーション



スパンを広くとってやることが肝要

キャリブレーション　－　ノンパラメトリック法

期初の債券価格へのキャリブレーション

スパン (in 標準偏差) が狭い例

0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
-0.10
-0.20
-0.30
-0.40
-0.50
-0.60

満期	Market	Calibrated	差
0			
1	5.000%	5.000%	0.000%
2	5.000%	4.978%	-0.022%
3	5.000%	5.029%	0.029%
4	5.000%	5.062%	0.062%
5	5.000%	5.090%	0.090%
6	5.000%	5.115%	0.115%
7	5.000%	5.137%	0.137%
8	5.000%	5.159%	0.159%
9	5.000%	5.180%	0.180%
10	5.000%	5.201%	0.201%

キャリブレーション　ー　ノンパラメトリック法

期初の債券価格へのキャリブレーション

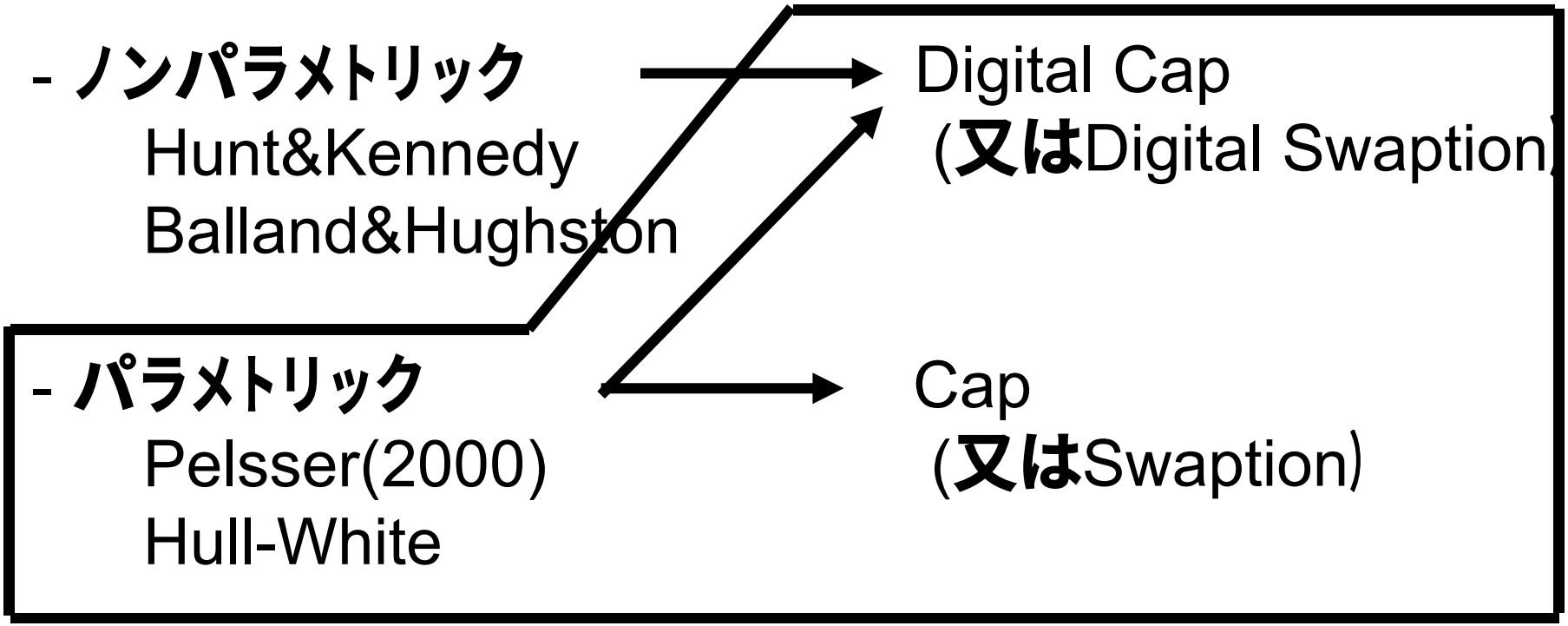
スパン (in 標準偏差) が広い例

4.20
3.50
2.80
2.10
1.40
0.70
0.00
-0.70
-1.40
-2.10
-2.80
-3.50
-4.20

満期	Market	Calibrated	差
0			
1	5.000%	5.000%	0.000%
2	5.000%	5.004%	0.004%
3	5.000%	5.007%	0.007%
4	5.000%	5.011%	0.011%
5	5.000%	5.013%	0.013%
6	5.000%	5.014%	0.014%
7	5.000%	5.014%	0.014%
8	5.000%	5.013%	0.013%
9	5.000%	5.012%	0.012%
10	5.000%	5.009%	0.009%

キャリブレーション　ー　パラメトリック法（1）

キャリブレーションの種類　- 3種類



キャリブレーション　ー　パラメトリック法（1）

Pelsser(2000)によるパラメタライゼーション

$$\frac{1}{P_{i,n}(X_i)} = 1 + a_i e^{b_i X_i} + d_i e^{-\frac{1}{2} c_i (X_i - m_i)^2}$$

a_i, b_i, c_i, d_i, m_i　はパラメーター（時点　i　ごとに用意される）

キャリブレーション　ー　パラメトリック法（1）

Pelsser(2000)によるパラメタライゼーション

$$\frac{1}{P_{i,n}(X_i)} = 1 + a_i e^{b_i X_i} + d_i e^{-\frac{1}{2}c_i (X_i - m_i)^2}$$

a_i, b_i, c_i, d_i, m_i **はパラメーター（時点 i ごとに用意される）**

条件付期待値

$$E^{Q_{T_n}}\left[\frac{1}{P_{j,n}(X_j)}\middle|\Im_i\right] = 1 + a_j e^{b_j x_i + \frac{v^2(i,j)b_j^2}{2}} + \frac{d_j}{\sqrt{1+c_j v^2(i,j)}} e^{\frac{-c_j (x_i - m_j)^2}{2\left(1+c_j v^2(i,j)\right)}}$$

$$= 1 + \bar{a}_j e^{b_j x_i} + \bar{d}_j e^{-\frac{1}{2}\bar{c}_j (x_i - m_j)^2}$$

$$\bar{a}_{i,j} = a_j e^{\frac{v^2(i,j)b_j^2}{2}},\ \bar{c}_{i,j} = \frac{c_j}{1+c_j v^2(i,j)},\ \bar{d}_{i,j} = \frac{d_j}{\sqrt{1+c_j v^2(i,j)}}$$

キャリブレーション　ー　パラメトリック法（1）

Pelsser(2000)によるパラメタライゼーション

債券価格

$$P_{i,j}(x_i) = \frac{1}{1 + a_i e^{b_i x_i} + d_i e^{-\frac{1}{2} c_i (x_i - m_i)^2}} \left(1 + \bar{a}_j e^{b_j x_i} + \bar{d}_j e^{-\frac{1}{2} \bar{c}_j (x_i - m_j)^2} \right) \quad (i < j)$$

$$\bar{a}_{i,j} = a_j e^{\frac{v^2(i,j) b_j^2}{2}}, \; \bar{c}_{0,j} = \frac{c_j}{1 + c_j v^2(i,j)}, \bar{d}_{0,j} = \frac{d_j}{\sqrt{1 + c_j v^2(i,j)}}$$

期初の債券価格

$$P_{0,j} = P_{0,n} \left(1 + \bar{a}_j + \bar{d}_j e^{-\frac{1}{2} \bar{c}_j m_j^2} \right)$$

$$\bar{a}_{0,j} = a_j e^{\frac{v^2(0,j) b_j^2}{2}}, \; \bar{c}_{0,j} = \frac{c_j}{1 + c_j v^2(0,j)}, \bar{d}_{0,j} = \frac{d_j}{\sqrt{1 + c_j v^2(0,j)}}$$

キャリブレーション　－　パラメトリック法（1）

Pelsser(2000)によるパラメタライゼーション

Digital Caplet

$$DC_0^{MF}(x_i^*) = P_{0,n}\left\{\Phi\left(-\frac{x_i^*}{v(0,i)}\right) + \overline{\overline{a}}_{i,i+1}\Phi\left(-\frac{x_i^* - v^2(0,i)b_{i+1}}{v(0,i)}\right)\right.$$

$$\left. + \overline{\overline{d}}_{i,i+1}e^{-\frac{1}{2}\overline{\overline{c}}_{i,i+1}m_{i+1}^2}\Phi\left(-\frac{x_i^* - v^2(0,i)\overline{\overline{c}}_{i,i+1}m_{i+1}}{\frac{v(0,i)}{\sqrt{1+v^2(0,i)\overline{c}_{i,i+1}}}}\right)\right\}$$

$$\overline{a}_{i,i+1} = a_{i+1}e^{\frac{v^2(i,i+1)b_{i+1}^2}{2}},\ \overline{c}_{i,i+1} = \frac{c_{i+1}}{1+c_{i+1}v^2(i,i+1)},\ \overline{d}_{i,i+1} = \frac{d_{i+1}}{\sqrt{1+c_{i+1}v^2(i,i+1)}}$$

$$\overline{\overline{a}}_{i,i+1} = \overline{a}_{i,i+1}e^{\frac{v^2(0,i)b_{i+1}^2}{2}},\ \overline{\overline{c}}_{i,i+1} = \frac{\overline{c}_{i,i+1}}{1+\overline{c}_{i,i+1}v^2(0,i)},\ \overline{\overline{d}}_{i,i+1} = \frac{\overline{d}_{i+1}}{\sqrt{1+\overline{c}_{i,i+1}v^2(0,i)}}$$

キャリブレーション　－　パラメトリック法 (1)

Pelsser(2000)によるパラメタライゼーション

Caplet

$$BP(T_i,T_j,K_B)=P_{0,n}\left\{(K_B-1)\Phi\left(-\frac{x_K}{v(0,i)}\right)+K_B\bar{a}_{0,i}\Phi\left(-\frac{x_K-v^2(0,i)b_i}{v(0,i)}\right)+K_B\bar{d}_{0,i}e^{-\frac{1}{2}m_i^2\bar{c}_{0,i}}\Phi\left(-\frac{x_K-m_i\bar{c}_{0,i}v^2(0,i)}{v(0,i)\sqrt{1+c_iv^2(0,i)}}\right)\right.$$
$$\left.-\bar{\bar{a}}_{i,j}\Phi\left(-\frac{x_K-v^2(0,i)b_j}{v(0,i)}\right)-\bar{\bar{d}}_{i,j}e^{-\frac{\bar{\bar{c}}_{i,j}m_j^2}{2}}\Phi\left(-\frac{x_K-v^2(0,i)\bar{\bar{c}}_{i,j}m_j}{v(0,i)\sqrt{1+v^2(0,i)\bar{c}_{i,j}}}\right)\right\}$$

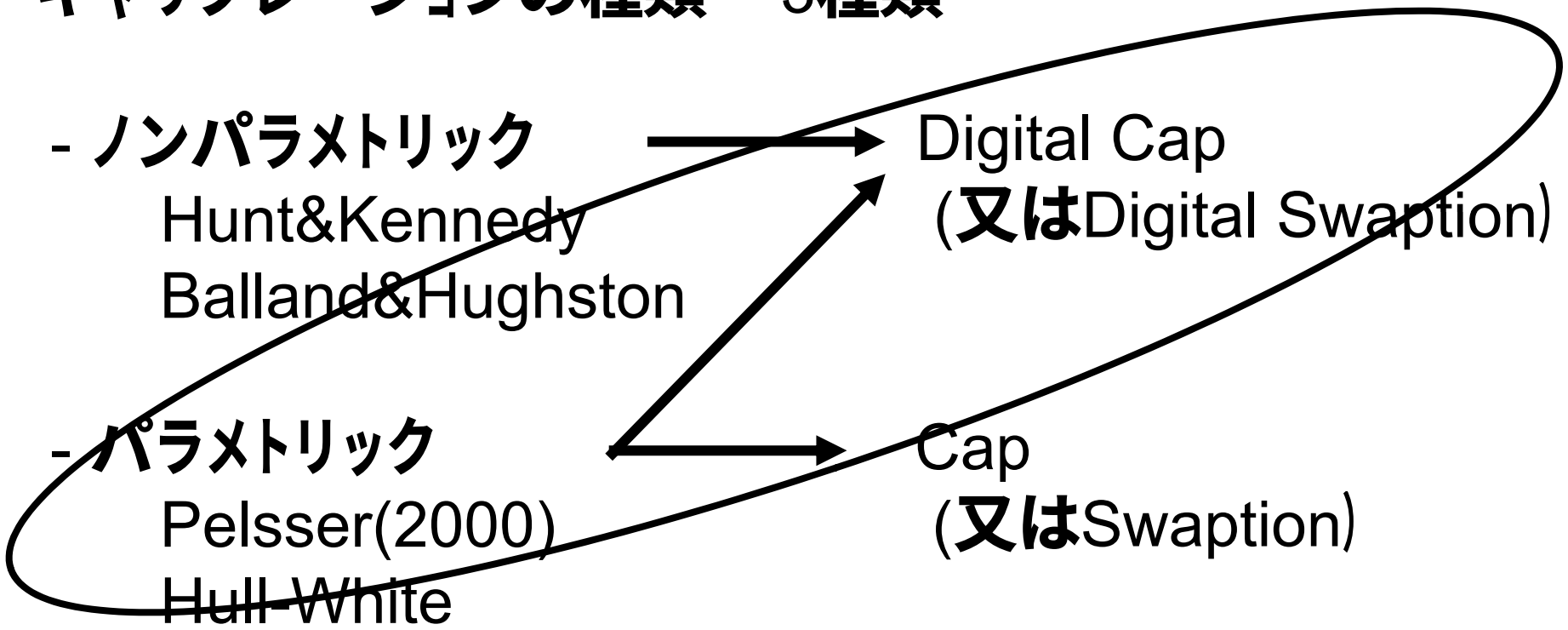
$$\bar{a}_{0,i}=a_ie^{\frac{v^2(0,i)b_i^2}{2}},\ \bar{c}_{0,i}=\frac{c_i}{1+c_iv^2(0,i)},\bar{d}_{0,i}=\frac{d_i}{\sqrt{1+c_iv^2(0,i)}}$$

$$\bar{a}_{i,j}=a_je^{\frac{v^2(i,j)b_j^2}{2}},\ \bar{c}_{i,j}=\frac{c_j}{1+c_jv^2(i,j)},\bar{d}_{i,j}=\frac{d_j}{\sqrt{1+c_jv^2(i,j)}}$$

$$\bar{\bar{a}}_{i,j}=\bar{a}_{i,j}e^{\frac{v^2(0,i)b_j^2}{2}},\ \bar{\bar{c}}_{i,j}=\frac{\bar{c}_{i,j}}{1+\bar{c}_{i,j}v^2(0,i)},\bar{\bar{d}}_{i,j}=\frac{\bar{d}_j}{\sqrt{1+\bar{c}_{i,j}v^2(0,i)}}$$

キャリブレーション　ー　パラメトリック法（1）

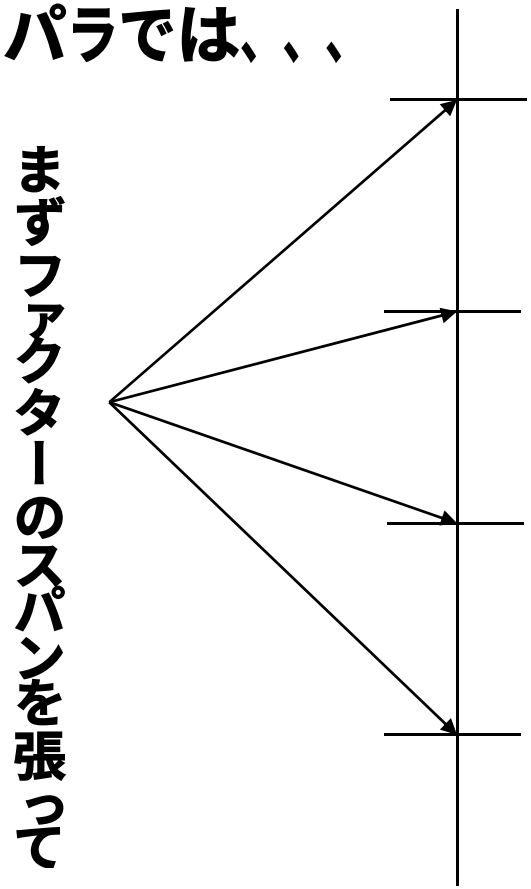
キャリブレーションの種類 - 3**種類**



キャリブレーション　ー　パラメトリック法（1）

（1）Digital Optionを用いる方法

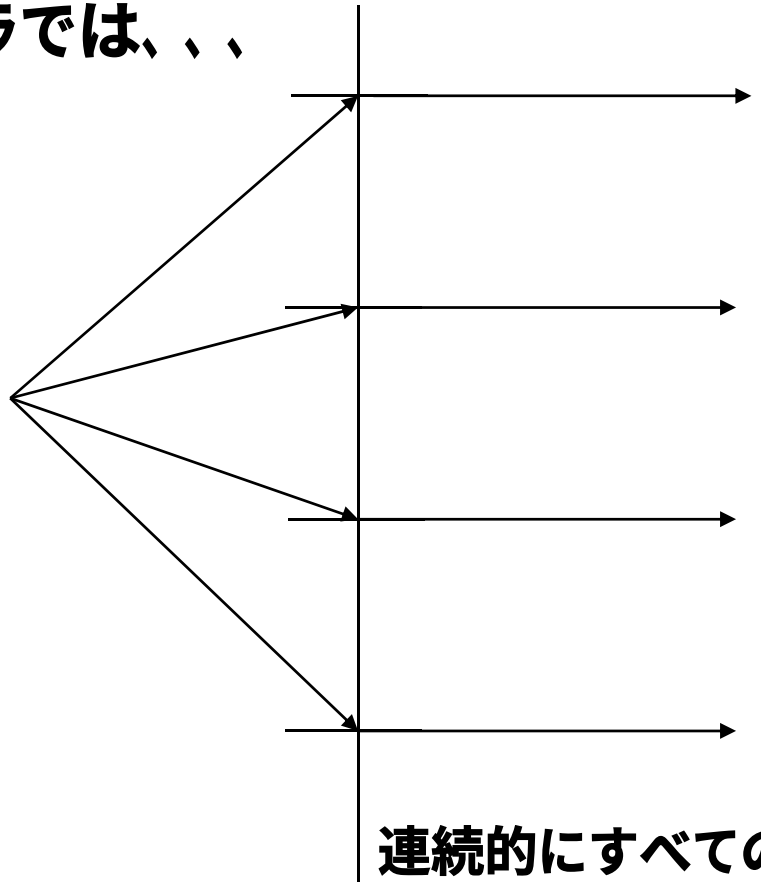
ノンパラでは、、、



キャリブレーション　ー　パラメトリック法（1）

（1）Digital Optionを用いる方法

ノンパラでは、、、



まずファクターのスパンを張って

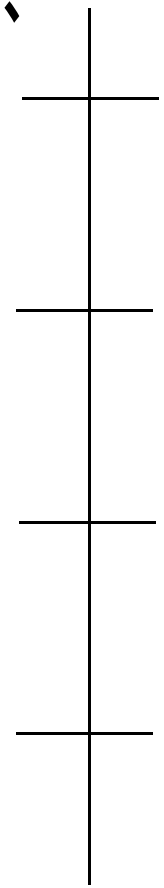
対応する市場のオプション価格を探しにいった

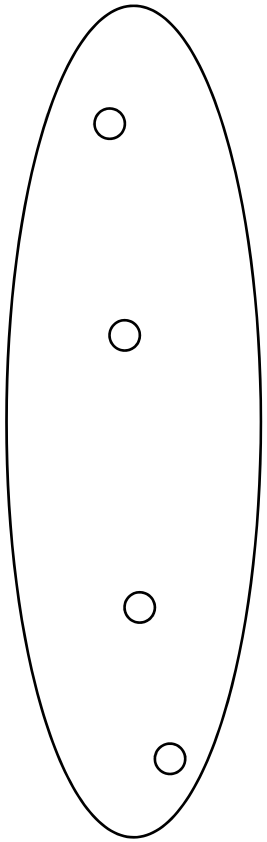
連続的にすべてのストライクでオプションが取引されていることが前提⇒実際は内挿、外挿が必要

キャリブレーション　ー　パラメトリック法（1）

（1）Digital Optionを用いる方法

パラメトリックでは逆、、、



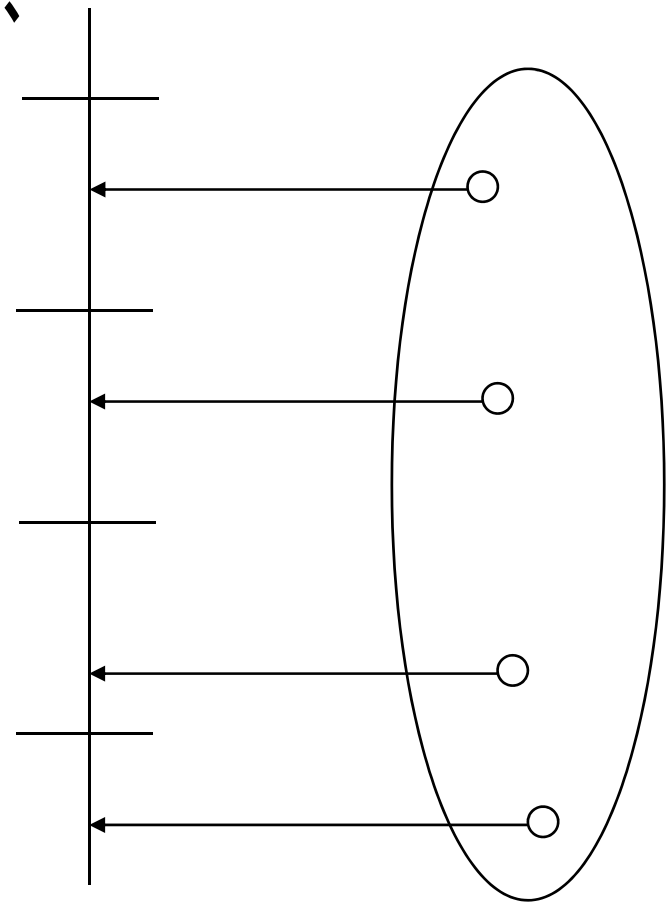


まずオプションがある限られたストライクで取引されている。

キャリブレーション　ー　パラメトリック法（1）

（1）Digital Optionを用いる方法

パラメトリックでは逆、、、



まずオプションがある限られたストライクで取引されている。

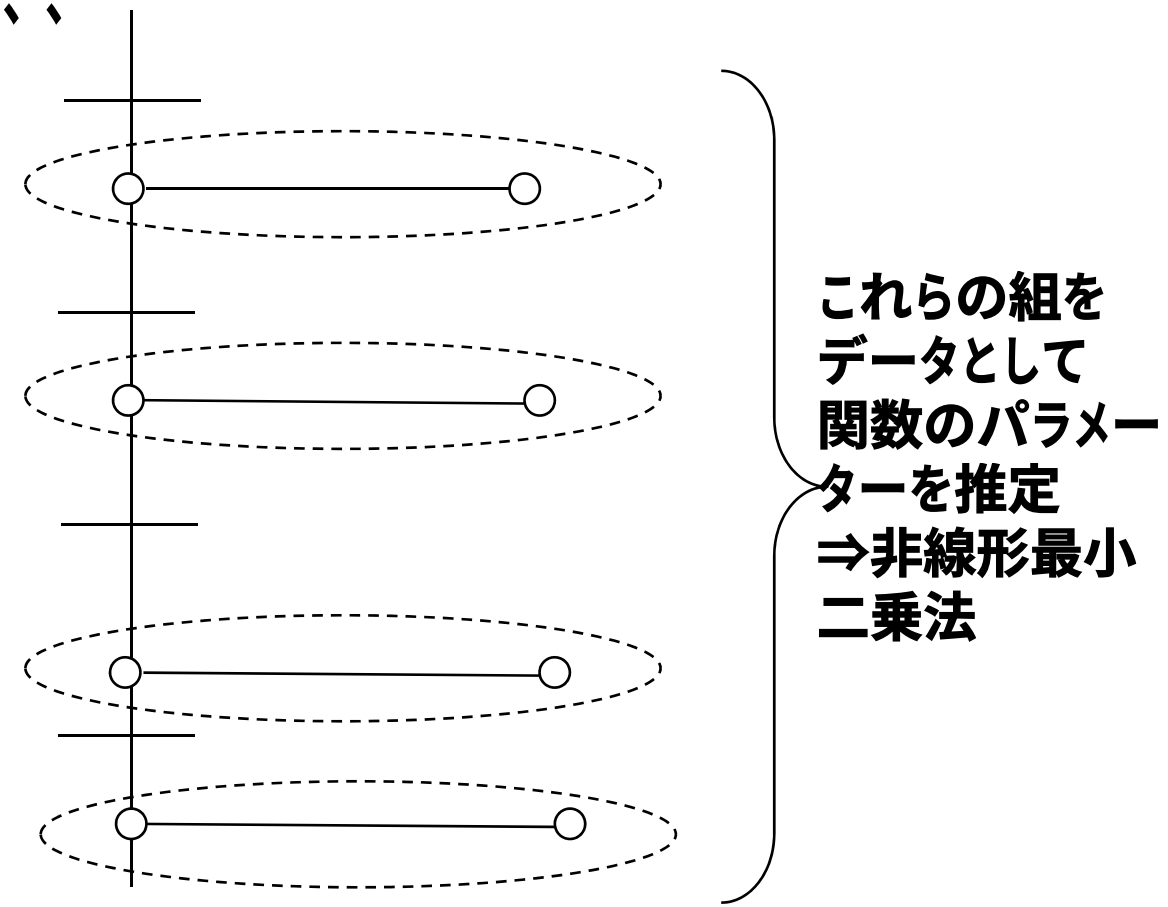
その上で対応しするファクターレベルを求める。

もちろんこれはスパンで張りたいファクターのレベルとは一致しない。

キャリブレーション　ー　パラメトリック法（1）

（1）Digital Optionを用いる方法

パラメトリックでは逆、、、



これらの組を
データとして
関数のパラメーターを推定
⇒非線形最小二乗法

その上で対応するファクターレベルを求める。

もちろんこれはスパンで張りたいファクターのレベルとは一致しない。

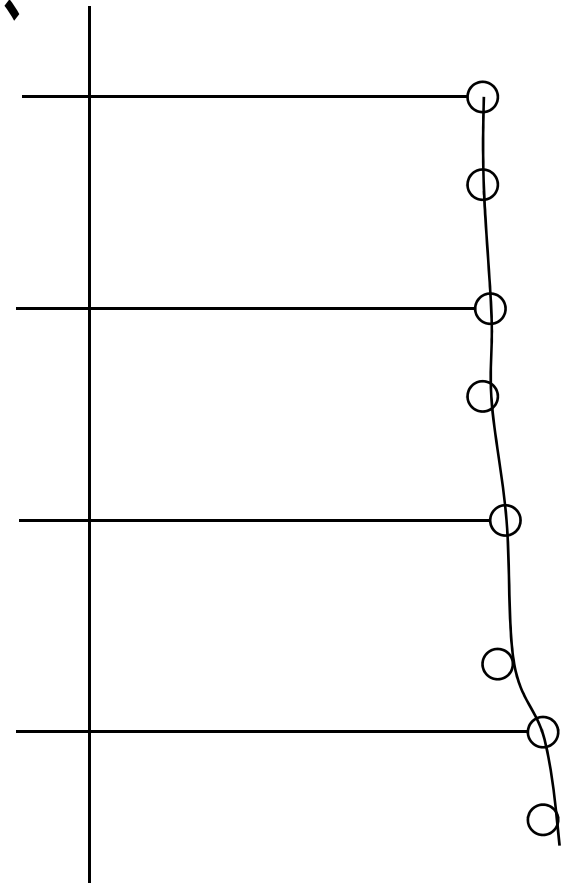
キャリブレーション　ー　パラメトリック法(1)

(1) Digital Optionを用いる方法

パラメトリックでは逆、、、

パラメーターが求まるとどのレベルのファクターに対しても値が求まるので、今度は張りたい点で空間を張ってプライシングへ、、、

各点でイールドカーブも解析解より引ける



キャリブレーション　ー　パラメトリック法（1）

（1）Digital Optionを用いる方法

$$P_{n-2,n} = P_{n-2,n}(X_{n-2}) = \frac{1}{(1+\delta_{n-2}L_{n-2,n-2,n-1}(X_{n-2}))E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{n-1,n}(X_{n-1})}\right| X_{n-2}\right]}$$

市場のDigital Optionのストライクに対応してファクターのレベルを逆算

既知の一期前のパラメーターのみで可能

⇒　Digital Optionの解析解を見よ！

キャリブレーション　ー　パラメトリック法（1）

（1）Digital Optionを用いる方法

$$P_{n-2,n} = P_{n-2,n}(X_{n-2}) = \frac{1}{(1+\delta_{n-2}L_{n-2,n-2,n-1}(X_{n-2}))E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{n-1,n}(X_{n-1})}\right| X_{n-2}\right]}$$

市場のDigital Optionのストライクに対応してファクターのレベルを逆算
既知の一期前のパラメーターのみで可能
⇒　Digital Optionの解析解を見よ！

ファクターのレベルが決まれば
既知の一期前のパラメーターのみで求められる
⇒　条件付期待値の解析解を見よ！

キャリブレーション　－　パラメトリック法（1）

（1）Digital Optionを用いる方法

$$P_{n-2,n} = P_{n-2,n}(X_{n-2}) = \frac{1}{(1+\delta_{n-2}L_{n-2,n-2,n-1}(X_{n-2}))E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{n-1,n}(X_{n-1})}\right| X_{n-2}\right]}$$

市場のDigital Optionのストライクに対応してファクターのレベルを逆算
既知の一期前のパラメーターのみで可能
⇒　Digital Optionの解析解を見よ！

ファクターのレベルが決まれば
既知の一期前のパラメーターのみで求められる
⇒　条件付期待値の解析解を見よ！

- **オプション価格からファクターのレベルを逆算できる**
- **オプションの数だけファクターとニューメレールの値の組ができる**

キャリブレーション　－　パラメトリック法（1）

（1）Digital Optionを用いる方法

$$P_{n-2,n} = P_{n-2,n}(X_{n-2}) = \frac{1}{(1+\delta_{n-2}L_{n-2,n-2,n-1}(X_{n-2}))E^{Q_n}\left[\left.\frac{1}{P_{n-1,n}(X_{n-1})}\right| X_{n-2}\right]}$$

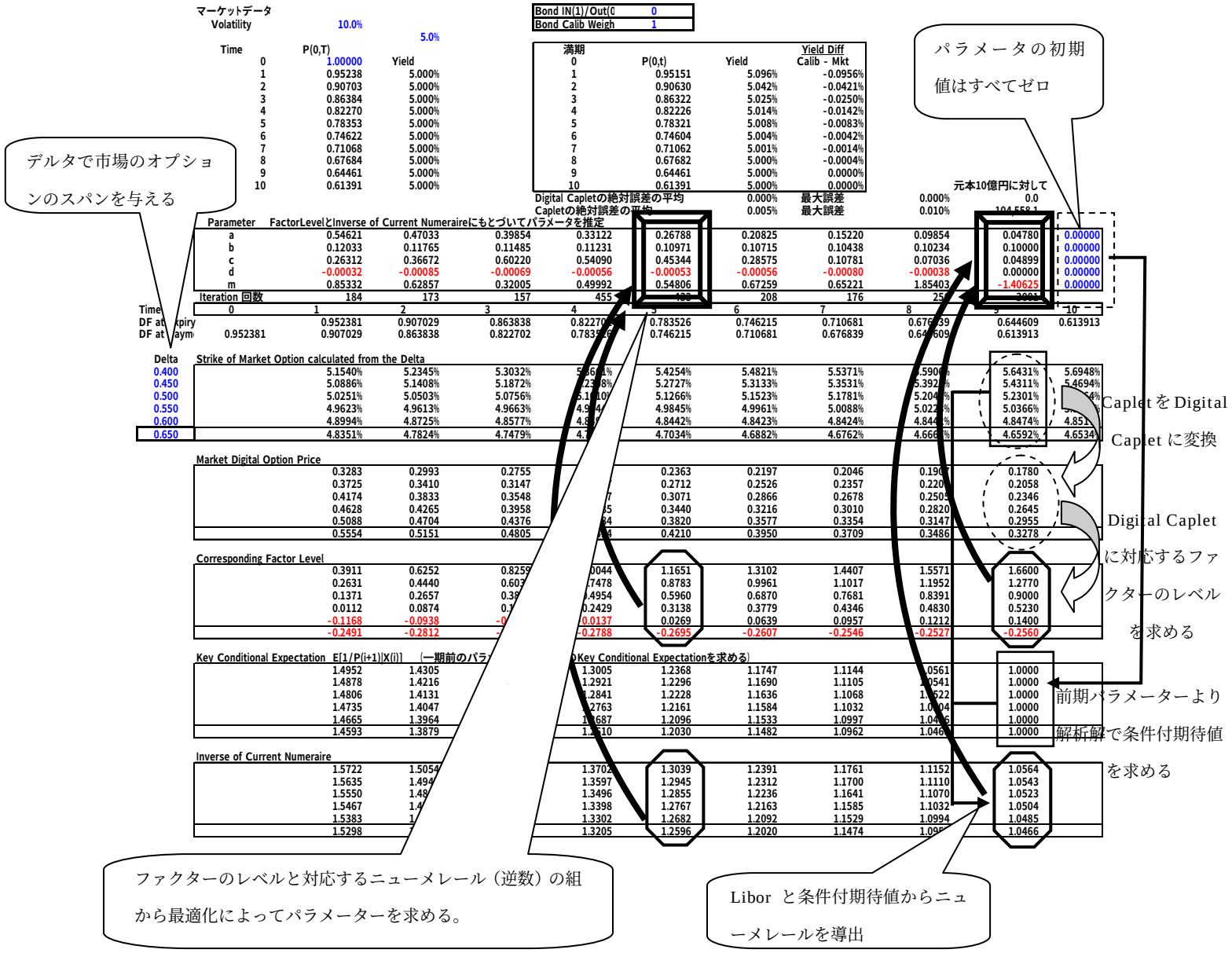
市場のDigital Optionのストライクに対応してファクターのレベルを逆算
既知の一期前のパラメーターのみで可能
⇒　Digital Optionの解析解を見よ！

ファクターのレベルが決まれば
既知の一期前のパラメーターのみで求められる
⇒　条件付期待値の解析解を見よ！

- **オプションの数だけファクターとニューメレールの値の組ができる**
- **データとして用いパラメータを推定**　$\frac{1}{P_{i,n}(X_i)} = 1 + a_i e^{b_i X_i} + d_i e^{-\frac{1}{2}c_i (X_i - m_i)^2}$

  ⇒　非線形最小二乗法

キャリブレーション　ー　パラメトリック法 (1)



キャリブレーション　－　パラメトリック法（1）

（1）Digital Optionを用いる方法

狭い場合

満期			Yield Diff
0	P(0,t)	Yield	Calib - Actual
1	0.95161	5.085%	-0.0850%
2	0.90639	5.037%	-0.0371%
3	0.86338	5.019%	-0.0187%
4	0.82229	5.013%	-0.0131%
5	0.78326	5.007%	-0.0072%
6	0.74606	5.004%	-0.0037%
7	0.71062	5.001%	-0.0012%
8	0.67682	5.000%	-0.0004%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

	Digital	Caplet
絶対誤差の平均	0.000%	0.005%
最大絶対誤差	0.000%	0.011%
10億円に対する実額	0.0	107,296.2

広い場合

満期			Yield Diff
0	P(0,t)	Yield	Calib - Actual
1	0.95199	5.043%	-0.0427%
2	0.90669	5.020%	-0.0198%
3	0.86354	5.012%	-0.0123%
4	0.82246	5.008%	-0.0076%
5	0.78338	5.004%	-0.0038%
6	0.74613	5.002%	-0.0020%
7	0.71066	5.000%	-0.0004%
8	0.67683	5.000%	-0.0002%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

	Digital	Caplet
絶対誤差の平均	0.000%	0.002%
最大絶対誤差	0.000%	0.004%
10億円に対する実額	0.0	40,866.5

- ほぼ完璧なDigital Capletへのキャリブレーション（Capletに対しても）

キャリブレーション　－　パラメトリック法（1）

（1）Digital Optionを用いる方法

狭い場合

満期			Yield Diff
0	P(0,t)	Yield	Calib - Actual
1	0.95161	5.085%	-0.0850%
2	0.90639	5.037%	-0.0371%
3	0.86338	5.019%	-0.0187%
4	0.82229	5.013%	-0.0131%
5	0.78326	5.007%	-0.0072%
6	0.74606	5.004%	-0.0037%
7	0.71062	5.001%	-0.0012%
8	0.67682	5.000%	-0.0004%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

	Digital	Caplet
絶対誤差の平均	0.000%	0.005%
最大絶対誤差	0.000%	0.011%
10億円に対する実額	0.0	107,296.2

広い場合

満期			Yield Diff
0	P(0,t)	Yield	Calib - Actual
1	0.95199	5.043%	-0.0427%
2	0.90669	5.020%	-0.0198%
3	0.86354	5.012%	-0.0123%
4	0.82246	5.008%	-0.0076%
5	0.78338	5.004%	-0.0038%
6	0.74613	5.002%	-0.0020%
7	0.71066	5.000%	-0.0004%
8	0.67683	5.000%	-0.0002%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

	Digital	Caplet
絶対誤差の平均	0.000%	0.002%
最大絶対誤差	0.000%	0.004%
10億円に対する実額	0.0	40,866.5

- ほぼ完璧なDigital Capletへのキャリブレーション（Capletに対しても）
- 期初のイールドカーブへのフィッティングは不十分

キャリブレーション　ー　パラメトリック法（1）

（1）Digital Optionを用いる方法

期初の債券価格の解析解を思い出すと、、、、

$$P_{0,j} = P_{0,n}\left(1 + \bar{a}_j + \bar{d}_j e^{-\frac{1}{2}\bar{c}_j m_j^2}\right)$$

$$\bar{a}_{0,j} = a_j e^{\frac{v^2(0,j)b_j^2}{2}},\ \bar{c}_{0,j} = \frac{c_j}{1 + c_j v^2(0,j)},\ \bar{d}_{0,j} = \frac{d_j}{\sqrt{1 + c_j v^2(0,j)}}$$

キャリブレーション　－　パラメトリック法（1）

（1）Digital Optionを用いる方法

期初のイールドカーブへのフィッティング

⇒　債券価格の解析解を用いて最適化の目的関数に加える

市場のオプションが狭い範囲で観察される場合　(デルタベースで0.45,0.475,0.50,0.525,0.55,0.575)

期初の債券価格へのCalibration - なし

満期			Yield Diff
0	P(0,t)	Yield	Calib - Actual
1	0.95161	5.085%	-0.0850%
2	0.90639	5.037%	-0.0371%
3	0.86338	5.019%	-0.0187%
4	0.82229	5.013%	-0.0131%
5	0.78326	5.007%	-0.0072%
6	0.74606	5.004%	-0.0037%
7	0.71062	5.001%	-0.0012%
8	0.67682	5.000%	-0.0004%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

	Digital	Caplet
絶対誤差の平均	0.000%	0.005%
最大絶対誤差	0.000%	0.011%
10億円に対する実額	0.0	107,296.2

期初の債券価格へのCalibration - あり、重み＝1

満期			Yield Diff
0	P(0,t)	Yield	Calib - Actual
1	0.95214	5.026%	-0.0260%
2	0.90675	5.016%	-0.0161%
3	0.86370	5.006%	-0.0057%
4	0.82257	5.004%	-0.0042%
5	0.78353	5.000%	0.0000%
6	0.74622	5.000%	0.0000%
7	0.71068	5.000%	0.0000%
8	0.67684	5.000%	0.0000%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

	Digital	Caplet
絶対誤差の平均	0.000%	0.009%
最大絶対誤差	0.000%	0.041%
10億円に対する実額	0.0	407,840.6

期初の債券価格へのCalibration - あり、重み

満期			Yield Diff
0	P(0,t)	Yield	Calib - Actual
1	0.95238	5.000%	0.0000%
2	0.90703	5.000%	0.0000%
3	0.86384	5.000%	0.0000%
4	0.82270	5.000%	0.0000%
5	0.78353	5.000%	0.0000%
6	0.74622	5.000%	0.0000%
7	0.71068	5.000%	0.0000%
8	0.67684	5.000%	0.0000%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

	Digital	Caplet
絶対誤差の平均	0.000%	0.255%
最大絶対誤差	0.000%	1.275%
10億円に対する実額	0.0	12,745,438.9

キャリブレーション　－　パラメトリック法（1）

（1）Digital Optionを用いる方法

期初のイールドカーブへのフィッティング

⇒　債券価格の解析解を用いて最適化の目的関数に加える

市場のオプションが広い範囲で観察される場合　(デルタベースで0.10,0.25,0.50,0.75,0.80,0.90)

期初の債券価格へのCalibration - なし

満期			Yield Diff
0	P(0,t)	Yield	Calib - Actual
1	0.95199	5.043%	-0.0427%
2	0.90669	5.020%	-0.0198%
3	0.86354	5.012%	-0.0123%
4	0.82246	5.008%	-0.0076%
5	0.78338	5.004%	-0.0038%
6	0.74613	5.002%	-0.0020%
7	0.71066	5.000%	-0.0004%
8	0.67683	5.000%	-0.0002%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

	Digital	Caplet
絶対誤差の平均	0.000%	0.002%
最大絶対誤差	0.000%	0.004%
10億円に対する実額	0.0	40,866.5

期初の債券価格へのCalibration - あり、重み＝1

満期			Yield Diff
0	P(0,t)	Yield	Calib - Actual
1	0.95238	5.000%	0.0000%
2	0.90703	5.000%	0.0000%
3	0.86384	5.000%	0.0000%
4	0.82270	5.000%	0.0000%
5	0.78352	5.000%	-0.0001%
6	0.74619	5.001%	-0.0006%
7	0.71068	5.000%	0.0000%
8	0.67683	5.000%	-0.0001%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

	Digital	Caplet
絶対誤差の平均	0.000%	0.000%
最大絶対誤差	0.000%	0.006%
10億円に対する実額	0.0	55,143.8

期初の債券価格へのCalibration - あり、重み

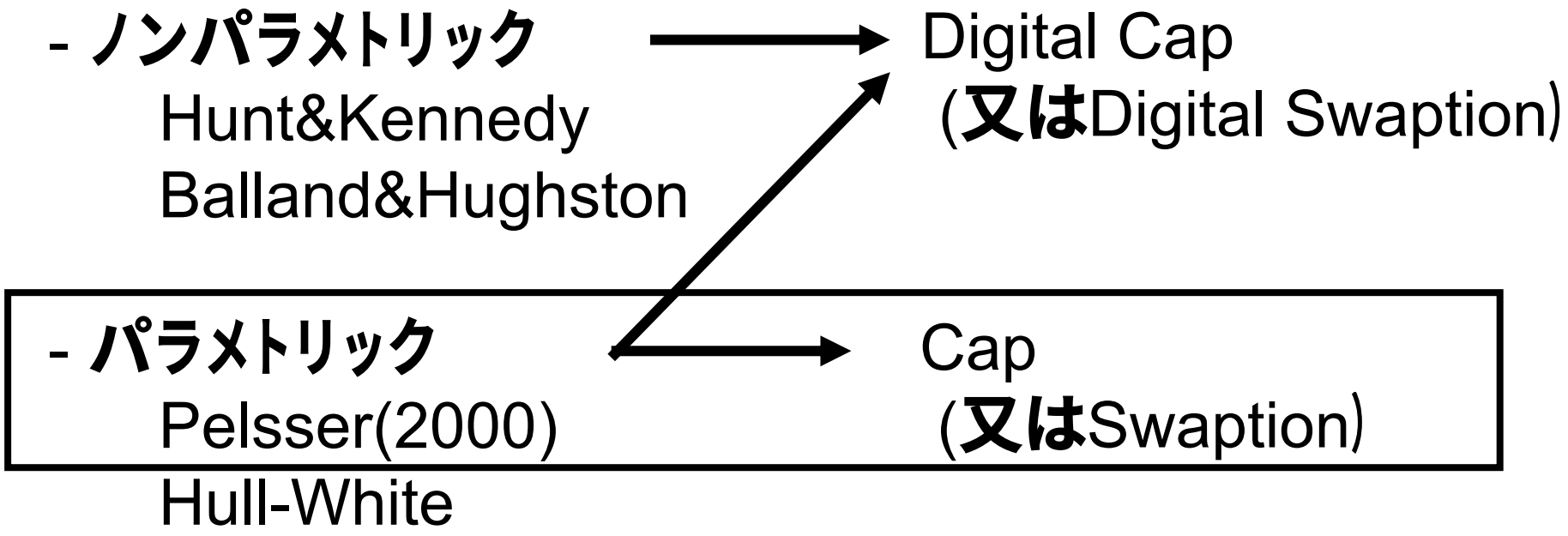
満期			Yield Diff
0	P(0,t)	Yield	Calib - Actual
1	0.95238	5.000%	0.0000%
2	0.90703	5.000%	0.0000%
3	0.86384	5.000%	0.0000%
4	0.82270	5.000%	0.0000%
5	0.78353	5.000%	0.0000%
6	0.74622	5.000%	0.0000%
7	0.71068	5.000%	0.0000%
8	0.67684	5.000%	0.0000%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

	Digital	Caplet
絶対誤差の平均	0.000%	0.002%
最大絶対誤差	0.000%	0.004%
10億円に対する実額	0.0	44,236.0

キャリブレーション　ー　パラメトリック法(2)

(2) Capletを直接を用いる方法

キャリブレーションの種類 - 3種類



キャリブレーション　－　パラメトリック法 (2)

(2) Capletを直接を用いる方法

$$BP(T_i,T_j,K_B)=P_{0,n}\left\{(K_B-1)\Phi\left(-\frac{x_K}{v(0,i)}\right)+K_B\bar{a}_{0,i}\Phi\left(-\frac{x_K-v^2(0,i)b_i}{v(0,i)}\right)+K_B\bar{d}_{0,i}e^{-\frac{1}{2}m_i^2\bar{c}_{0,i}}\Phi\left(-\frac{x_K-m_i\bar{c}_{0,i}v^2(0,i)}{\sqrt{1+c_iv^2(0,i)}}\right)\right.$$
$$\left.-\bar{\bar{a}}_{i,j}\Phi\left(-\frac{x_K-v^2(0,i)b_j}{v(0,i)}\right)-\bar{\bar{d}}_{i,j}e^{-\frac{\bar{\bar{c}}_{i,j}m_j^2}{2}}\Phi\left(-\frac{x_K-v^2(0,i)\bar{\bar{c}}_{i,j}m_j}{\sqrt{1+v^2(0,i)\bar{c}_{i,j}}}\right)\right\}$$

今 “i”時点にいるなら“i”時点と“i+1”時点のパラメターが出てくる

最終時点のパラメーターはすべてゼロ　⇒　初期値が与えられている

満期から遡っていけば“i”時点のパラメーターだけになる

このパラメーターを動かしてCapletの価格に合うように最適化

キャリブレーション　ー　パラメトリック法 (2)

(2) Capletを直接を用いる方法　ー　実証

最適化が収束せず　ー　初期値に対して以上に敏感

キャリブレーション　ー　パラメトリック法 (2)

(2) Capletを直接を用いる方法　ー　実証

最適化が収束せず　ー　初期値に対して以上に敏感

Capletを一度Digital Capletに変換してそちらサイドでパラメーターを推定

キャリブレーション　ー　パラメトリック法 (2)

(2) Capletを直接を用いる方法　ー　実証

最適化が収束せず　ー　初期値に対して以上に敏感

Capletを一度Digital Capletに変換してそちらサイドでパラメーターを推定

これを初期値として用いCapletで最適化をはかる　⇒　成功

キャリブレーション　－　パラメトリック法 (2)

(2) Capletを直接を用いる方法　－　実証

最適化が収束せず　－　初期値に対して以上に敏感

Capletを一度Digital Capletに変換してそちらサイドでパラメーターを推定

これを初期値として用いCapletで最適化をはかる　⇒　成功

理由？：パラメーターで表現したものはニューメレール、すなわち債券価格

Digital CapletとCapletではDigitalの方が債券に近い？？

キャリブレーション　－　パラメトリック法 (2)

(2) Capletを直接を用いる方法

市場のオプションが狭い範囲で観察される場合
(デルタ: 0.45, 0.475, 0.50, 0.525, 0.55, 0.575)
期初の債券価格へのCalibration - なし

満期	Calibrated Price	Calibrated Yield	Yield Diff Calib - Actual
1	0.95231	5.008%	0.0078%
2	0.90766	4.964%	-0.0365%
3	0.86302	5.033%	0.0332%
4	0.82136	5.043%	0.0427%
5	0.78381	4.992%	-0.0077%
6	0.74599	5.005%	0.0052%
7	0.71070	5.000%	-0.0004%
8	0.67684	5.000%	0.0000%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

Capletの絶対誤差の平均	0.0001%
Capletの絶対誤差の最大値	0.0002%
絶対最大誤差の10億円に対する実	2,288.7

市場のオプションが広い範囲で観察される場合
(デルタ:0.10, 0.25, 0.50, 0.75, 0.80, 0.90)
期初の債券価格へのCalibration - なし

満期	Calibrated Price	Calibrated Yield	Yield Diff Calib - Actual
1	0.95186	5.058%	0.0578%
2	0.90659	5.026%	0.0257%
3	0.86352	5.013%	0.0128%
4	0.82244	5.008%	0.0082%
5	0.78341	5.003%	0.0031%
6	0.74616	5.001%	0.0012%
7	0.71067	5.000%	0.0001%
8	0.67683	5.000%	0.0001%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

Capletの絶対誤差の平均	0.0006%
Capletの絶対誤差の最大値	0.0012%
絶対最大誤差の10億円に対する実	12,444.4

左の二つの例の中間
(デルタ:0.40, 0.45, 0.50, 055, 060, 0.65)
期初の債券価格へのCalibration - なし

満期	Calibrated Price	Calibrated Yield	Yield Diff Calib - Actual
1	0.95196	5.046%	0.0460%
2	0.90672	5.018%	0.0180%
3	0.86367	5.007%	0.0069%
4	0.82255	5.005%	0.0049%
5	0.78328	5.007%	0.0067%
6	0.74611	5.003%	0.0025%
7	0.71069	5.000%	-0.0002%
8	0.67682	5.000%	0.0003%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

Capletの絶対誤差の平均	0.0001%
Capletの絶対誤差の最大値	0.0001%
絶対最大誤差の10億円に対する	1,372.6

オプションへのキャリブレーションはほぼパーフェクト

キャリブレーション　－　パラメトリック法 (2)

(2) Capletを直接を用いる方法

市場のオプションが狭い範囲で観察される場合
(デルタ: 0.45, 0.475, 0.50, 0.525, 0.55, 0.575)
期初の債券価格へのCalibration - なし

満期	Calibrated Price	Calibrated Yield	Yield Diff Calib - Actual
1	0.95231	5.008%	0.0078%
2	0.90766	4.964%	-0.0365%
3	0.86302	5.033%	0.0332%
4	0.82136	5.043%	0.0427%
5	0.78381	4.992%	-0.0077%
6	0.74599	5.005%	0.0052%
7	0.71070	5.000%	-0.0004%
8	0.67684	5.000%	0.0000%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

Capletの絶対誤差の平均　0.0001%
Capletの絶対誤差の最大値　0.0002%
絶対最大誤差の10億円に対する実[illegible]　2,288.7

市場のオプションが広い範囲で観察される場合
(デルタ:0.10, 0.25, 0.50, 0.75, 0.80, 0.90)
期初の債券価格へのCalibration - なし

満期	Calibrated Price	Calibrated Yield	Yield Diff Calib - Actual
1	0.95186	5.058%	0.0578%
2	0.90659	5.026%	0.0257%
3	0.86352	5.013%	0.0128%
4	0.82244	5.008%	0.0082%
5	0.78341	5.003%	0.0031%
6	0.74616	5.001%	0.0012%
7	0.71067	5.000%	0.0001%
8	0.67683	5.000%	0.0001%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

Capletの絶対誤差の平均　0.0006%
Capletの絶対誤差の最大値　0.0012%
絶対最大誤差の10億円に対する実[illegible]　12,444.4

左の二つの例の中間
(デルタ:0.40, 0.45, 0.50, 055, 060, 0.65)
期初の債券価格へのCalibration - なし

満期	Calibrated Price	Calibrated Yield	Yield Diff Calib - Actual
1	0.95196	5.046%	0.0460%
2	0.90672	5.018%	0.0180%
3	0.86367	5.007%	0.0069%
4	0.82255	5.005%	0.0049%
5	0.78328	5.007%	0.0067%
6	0.74611	5.003%	0.0025%
7	0.71069	5.000%	-0.0002%
8	0.67682	5.000%	0.0003%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

Capletの絶対誤差の平均　0.0001%
Capletの絶対誤差の最大値　0.0001%
絶対最大誤差の10億円に対する[illegible]　1,372.6

オプションへのキャリブレーションはほぼパーフェクト

期初のイールドカーブへのキャリブレーションは悪い

キャリブレーション　－　パラメトリック法 (2)

(2) Capletを直接を用いる方法

期初のイールドカーブへのフィッティング
⇒　債券価格の解析解を用いて最適化の目的関数に加える

市場のオプションが狭い範囲で観察される場合
(デルタ: 0.45, 0.475, 0.50, 0.525, 0.55, 0.575)

期初の債券価格へのCalibration - あり

	Calibrated		Yield Diff
満期	Price	Yield	Calib - Actual
1	0.95238	5.000%	0.0000%
2	0.90703	5.000%	0.0000%
3	0.86384	5.000%	0.0000%
4	0.82270	5.000%	0.0000%
5	0.78353	5.000%	0.0000%
6	0.74622	5.000%	0.0000%
7	0.71068	5.000%	0.0000%
8	0.67684	5.000%	0.0000%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

Capletの絶対誤差の平均	0.0024%
Capletの絶対誤差の最大値	0.0075%
絶対最大誤差の10億円に対する実	75,419.2

市場のオプションが広い範囲で観察される場合
(デルタ:0.10, 0.25, 0.50, 0.75, 0.80, 0.90)

期初の債券価格へのCalibration - あり

	Calibrated		Yield Diff
満期	Price	Yield	Calib - Actual
1	0.95238	5.000%	0.0000%
2	0.90703	5.000%	0.0000%
3	0.86384	5.000%	0.0000%
4	0.82270	5.000%	0.0000%
5	0.78353	5.000%	0.0000%
6	0.74622	5.000%	0.0000%
7	0.71068	5.000%	0.0000%
8	0.67684	5.000%	0.0000%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

Capletの絶対誤差の平均	0.0018%
Capletの絶対誤差の最大値	0.0054%
絶対最大誤差の10億円に対する実	53,911.5

左の二つの例の中間
(デルタ:0.40, 0.45, 0.50, 055, 060, 0.65)

期初の債券価格へのCalibration - あり

	Calibrated		Yield Diff
満期	Price	Yield	Calib - Actual
1	0.95238	5.000%	0.0000%
2	0.90703	5.000%	0.0000%
3	0.86384	5.000%	0.0000%
4	0.82270	5.000%	0.0000%
5	0.78353	5.000%	0.0000%
6	0.74622	5.000%	0.0000%
7	0.71068	5.000%	0.0000%
8	0.67684	5.000%	0.0000%
9	0.64461	5.000%	0.0000%
10	0.61391	5.000%	0.0000%

Capletの絶対誤差の平均	0.0002%
Capletの絶対誤差の最大値	0.0011%
絶対最大誤差の10億円に対する	11,219.4

すべてに関して完璧なキャリブレーションを達成！！

キャリブレーション　ー　パラメトリック法 (2)

期初のイールドカーブへのフィッティング

⇒　Digital Capletを用いる方法、Capletを用いる方法共に債券価格を目的関数に加えることによって達成できた

キャリブレーション　－　パラメトリック法 (2)

期初のイールドカーブへのフィッティング

⇒　Digital Capletを用いる方法、Capletを用いる方法共に債券価格を目的関数に加えることによって達成できた

Digital Capletを用いる方法

ストライクのスパンが狭いとDigital OptionへはフィットしてもCapletにフィットできず

Caplet用いる方法

ストライクのスパンに係わらずDigital Option、CapletともにフィットDigital Option、Capletともにフィット

キャリブレーション　－　パラメトリック法 (2)

期初のイールドカーブへのフィッティング

⇒　Digital Capletを用いる方法、Capletを用いる方法共に債券価格を目的関数に加えることによって達成できた

Digital Capletを用いる方法

ストライクのスパンが狭いとDigital OptionへはフィットしてもCapletにフィットできず

Caplet用いる方法

ストライクのスパンに係わらずDigital Option、Capletともにフィット

ただしCapletを用いる方法はDigital Capletを用いる方法でパラメーターの初期値をまず求める必要があった

キャリブレーション　ー　パラメトリック法

Hull-White モデル

S.D.E.

$$dr_t = (\theta(t) - a(t)r_t)dt + \sigma(t)dW_t^Q$$

キャリブレーション　ー　パラメトリック法

Hull-White モデル

S.D.E.

$$dr_t = (\theta(t) - a(t)r_t)dt + \sigma(t)dW_t^Q$$

一般的な教科書の債券価格の解析解

$$P(t,T) = e^{A_1(t,T) - A_2(t,T)r_t}$$

$$A_1(t,T) = \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(u)A_2^2(u,T)du - \int_t^T \theta(u)A_2(u,T)du$$

$$A_2(t,T) = \int_t^T e^{-\int_t^s a(v)dv} ds$$

キャリブレーション　ー　パラメトリック法

Hull-White モデル

S.D.E.

$$dr_t = (\theta(t) - a(t)r_t)dt + \sigma(t)dW_t^Q$$

一般的な教科書の債券価格の解析解

これが実務家は嫌い

$$P(t,T) = e^{A_1(t,T) - A_2(t,T)r_t}$$

$$A_1(t,T) = \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(u)A_2^2(u,T)du - \int_t^T \theta(u)A_2(u,T)du$$

$$A_2(t,T) = \int_t^T e^{-\int_t^s a(v)dv} ds$$

キャリブレーション　ー　パラメトリック法

Hull-White モデル

Hunt&Kennedyによる式

$$\frac{P_{t,j}}{P_{t,n}} = \frac{P_{0,j}}{P_{0,n}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\psi_n - \psi_j)^2 \int_0^t \phi_u^2 \sigma_u^2 du + (\psi_n - \psi_j) \int_0^t \phi_u \sigma_u dW_u^n \right\}$$

$$\phi_t = e^{\int_0^t a_u du} \qquad \psi_t = \int_0^t \phi_u^{-1} du$$

$$= \frac{P_{0,j}}{P_{0,n}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\psi_n - \psi_j)^2 G(t) + (\psi_n - \psi_j) W_{G(t)} \right\}$$

$$G(t) = \int_0^t \phi_u^2 \sigma_u^2 du \qquad W_{G(t)} \text{はTime Changed Brownian Motion}$$

キャリブレーション　ー　パラメトリック法

Hull-White モデル

Hunt&Kennedyによる式

$$\frac{P_{t,j}}{P_{t,n}} = \frac{P_{0,j}}{P_{0,n}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\psi_n - \psi_j)^2 \int_0^t \phi_u^2 \sigma_u^2 du + (\psi_n - \psi_j) \int_0^t \phi_u \sigma_u dW_u^n \right\}$$

$$\phi_t = e^{\int_0^t a_u du} \qquad \psi_t = \int_0^t \phi_u^{-1} du$$

$$= \frac{P_{0,j}}{P_{0,n}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\psi_n - \psi_j)^2 G(t) + (\psi_n - \psi_j) W_{G(t)} \right\}$$

$$G(t) = \int_0^t \phi_u^2 \sigma_u^2 du \qquad W_{G(t)} \text{はTime Changed Brownian Motion}$$

ファクター

キャリブレーション　ー　パラメトリック法

Hull-White モデル

Hunt&Kennedyによる式

$$\frac{P_{t,j}}{P_{t,n}} = \frac{P_{0,j}}{P_{0,n}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\psi_n - \psi_j)^2 \int_0^t \phi_u^2 \sigma_u^2 du + (\psi_n - \psi_j) \int_0^t \phi_u \sigma_u dW_u^n \right\}$$

$$\phi_t = e^{\int_0^t a_u du} \qquad \psi_t = \int_0^t \phi_u^{-1} du$$

$$= \frac{P_{0,j}}{P_{0,n}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\psi_n - \psi_j)^2 G(t) + (\psi_n - \psi_j) W_{G(t)} \right\}$$

$$G(t) = \int_0^t \phi_u^2 \sigma_u^2 du \qquad W_{G(t)} \text{はTime Changed Brownian Motion}$$

パラメーター（1）

ファクター

キャリブレーション　ー　パラメトリック法

Hull-White モデル

Hunt&Kennedyによる式

$$\frac{P_{t,j}}{P_{t,n}} = \frac{P_{0,j}}{P_{0,n}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\psi_n - \psi_j)^2 \int_0^t \phi_u^2 \sigma_u^2 du + (\psi_n - \psi_j) \int_0^t \phi_u \sigma_u dW_u^n \right\}$$

$$\phi_t = e^{\int_0^t a_u du} \qquad \psi_t = \int_0^t \phi_u^{-1} du$$

$$= \frac{P_{0,j}}{P_{0,n}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\psi_n - \psi_j)^2 G(t) + (\psi_n - \psi_j) W_{G(t)} \right\}$$

$G(t) = \int_0^t \phi_u^2 \sigma_u^2 du$　$W_{G(t)}$ はTime Changed Brownian Motion

パラメーター（1）　パラメーター（2）　ファクター

キャリブレーション　ー　パラメトリック法

Hull-White モデル

Hunt&Kennedyによる式

期初の債券価格

$$\frac{P_{t,j}}{P_{t,n}} = \frac{P_{0,j}}{P_{0,n}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\psi_n - \psi_j)^2 \int_0^t \phi_u^2 \sigma_u^2 du + (\psi_n - \psi_j) \int_0^t \phi_u \sigma_u dW_u^n \right\}$$

$$\phi_t = e^{\int_0^t a_u du} \qquad \psi_t = \int_0^t \phi_u^{-1} du$$

$$= \frac{P_{0,j}}{P_{0,n}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\psi_n - \psi_j)^2 G(t) + (\psi_n - \psi_j) W_{G(t)} \right\}$$

$$G(t) = \int_0^t \phi_u^2 \sigma_u^2 du \qquad W_{G(t)}$$ はTime Changed Brownian Motion

パラメーター（1）

パラメーター（2）

ファクター

キャリブレーション　ー　パラメトリック法

Hull-White モデル

Hunt&Kennedyによる式

期初の債券価格

Exponential Martingale

$$\frac{P_{t,j}}{P_{t,n}} = \frac{P_{0,j}}{P_{0,n}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\psi_n - \psi_j)^2 \int_0^t \phi_u^2 \sigma_u^2 du + (\psi_n - \psi_j) \int_0^t \phi_u \sigma_u dW_u^n \right\}$$

$$\phi_t = e^{\int_0^t a_u du} \qquad \psi_t = \int_0^t \phi_u^{-1} du$$

$$= \frac{P_{0,j}}{P_{0,n}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\psi_n - \psi_j)^2 G(t) + (\psi_n - \psi_j) W_{G(t)} \right\}$$

$$G(t) = \int_0^t \phi_u^2 \sigma_u^2 du \qquad W_{G(t)}$$ はTime Changed Brownian Motion

パラメーター（1）

パラメーター（2）

ファクター

キャリブレーション　ー　パラメトリック法

Hull-White モデル

Hull-White モデルは“パラメトリックな”Markov Functional Model

同式をHunt-Kennedyより直接的でわかりやすい方法で導出

パラメータは（各期）2個　（S.D.E.では3個だが、1個は債券価格に吸収される）

期初の債券価格へのフィットは関数形より保証されている
　⇒　Martingale Restrictionが自動的に満たされている

Markov Functional Model特有の高速かつ滑らかな数値積分法利用可能

まとめ　ー　成果

ノンパラメトリックとパラメトリックなアプローチへの体系的かつ具体的記述

独自のモデル、キャリブレーションの解説　⇒　イールドカーブCubeまで

高速かつなめらかな数値積分の具体化

初めての具体的計算例

Pelsser（２０００）のパラメトリックモデルにおける色々な解析解の導出

Pelsser（２０００）のパラメトリックモデルにおけるDigital Optionを用いた
新しいキャリブレーション方法の提示　⇒　実証

期初のイールドカーブへのキャリブレーションのメカニズムと
それを保証するアルゴリズムの提案　⇒　実証

Hull-WhiteモデルをMarkov Functional Interest Rate Modelとして再構成

まとめ　－　成果

ノンパラメトリックとパラメトリックなアプローチへの体系的かつ具体的記述

独自のモデル、キャリブレーションの解説　⇒　イールドカーブCubeまで

高速かつなめらかな数値積分の具体化

初めての具体的計算例

Pelsser（２０００）のパラメトリックモデルにおける色々な解析解の導出

Pelsser（２０００）のパラメトリックモデルにおけるDigital Optionを用いた
新しいキャリブレーション方法の提示　⇒　実証

期初のイールドカーブへのキャリブレーションのメカニズムと
それを保証するアルゴリズムの提案　⇒　実証

Hull-WhiteモデルをMarkov Functional Interest Rate Modelとして再構成

まとめ　ー　課題

ファクターの特定化

パラメトリックなアプローチにおける他の関数形　パラメーター数1個？3個？

多次元化

他資産への応用