金融市場混乱期における日本のクレジット・スプレッドの変動と依存構造

ー 多変量コピュラによる推定とその応用ー

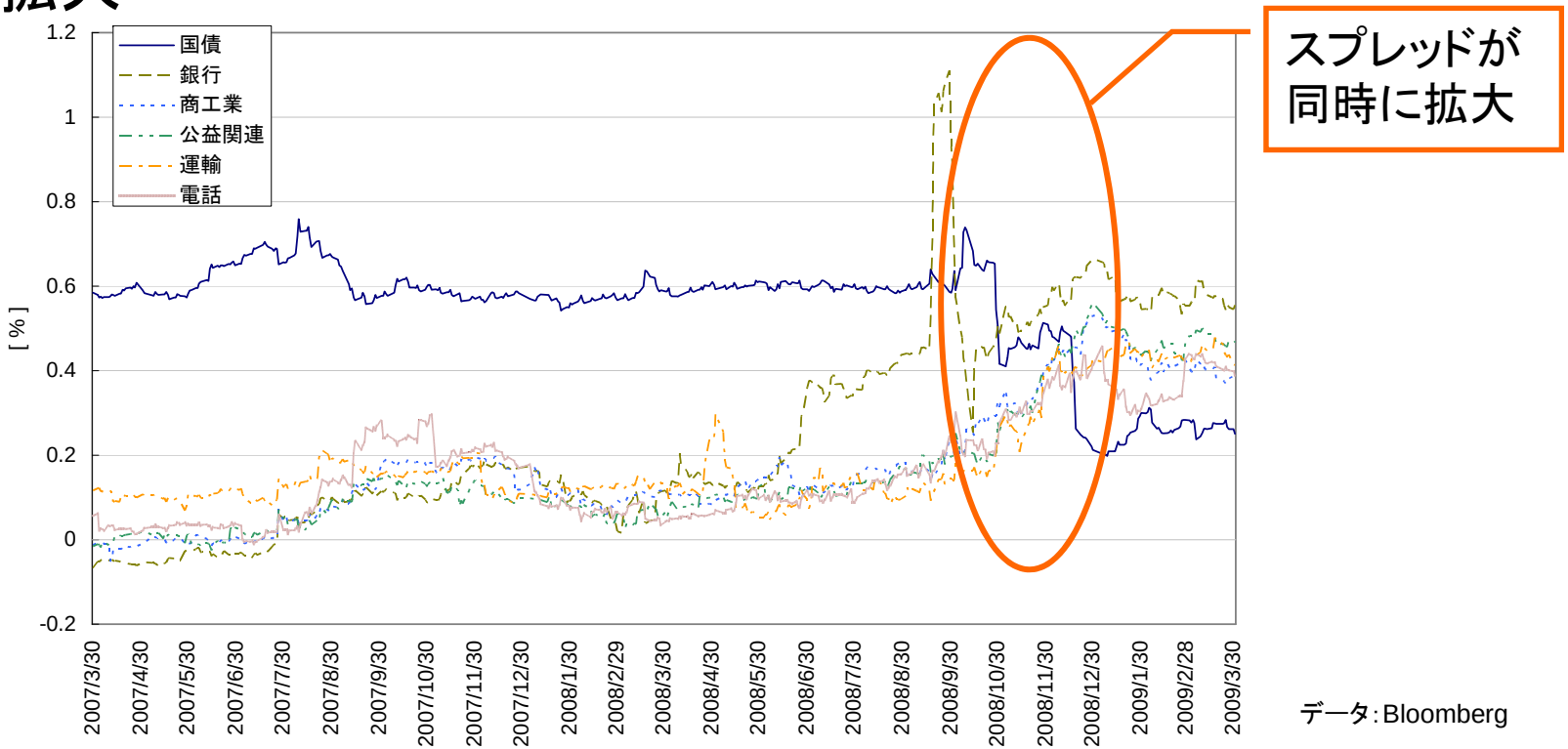
一橋大学大学院国際企業戦略研究科
金融戦略･経営財務コース
修士論文発表会

2010年3月19日

IM08F024
野澤　勇樹

1. 研究の背景

- 金融市場の混乱期、セクターを問わずクレジット・スプレッドが拡大



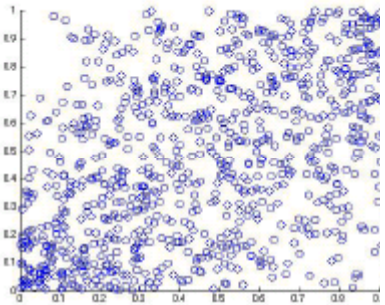
データ:Bloomberg

- ポートフォリオに期待される分散効果が希薄化
- 上昇／下落時で異なる依存度合い

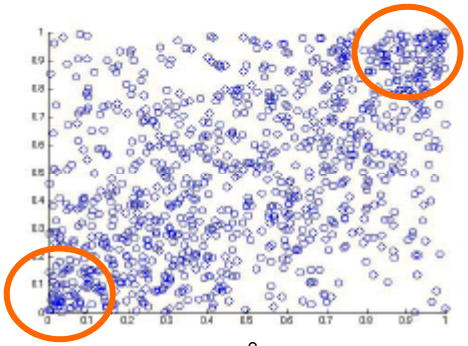
2-(1). 依存構造の捕捉　コピュラ

■ 大幅な利回り変化時の依存構造を裾依存として捕捉

- 楕円コピュラ



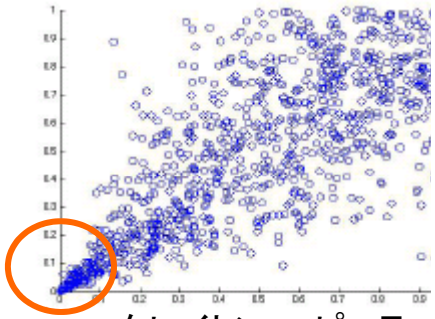
正規コピュラ



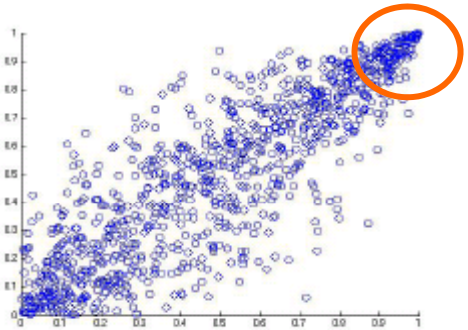
t コピュラ

上下対称な
依存構造

- アルキメディアン・コピュラ



クレイトン・コピュラ

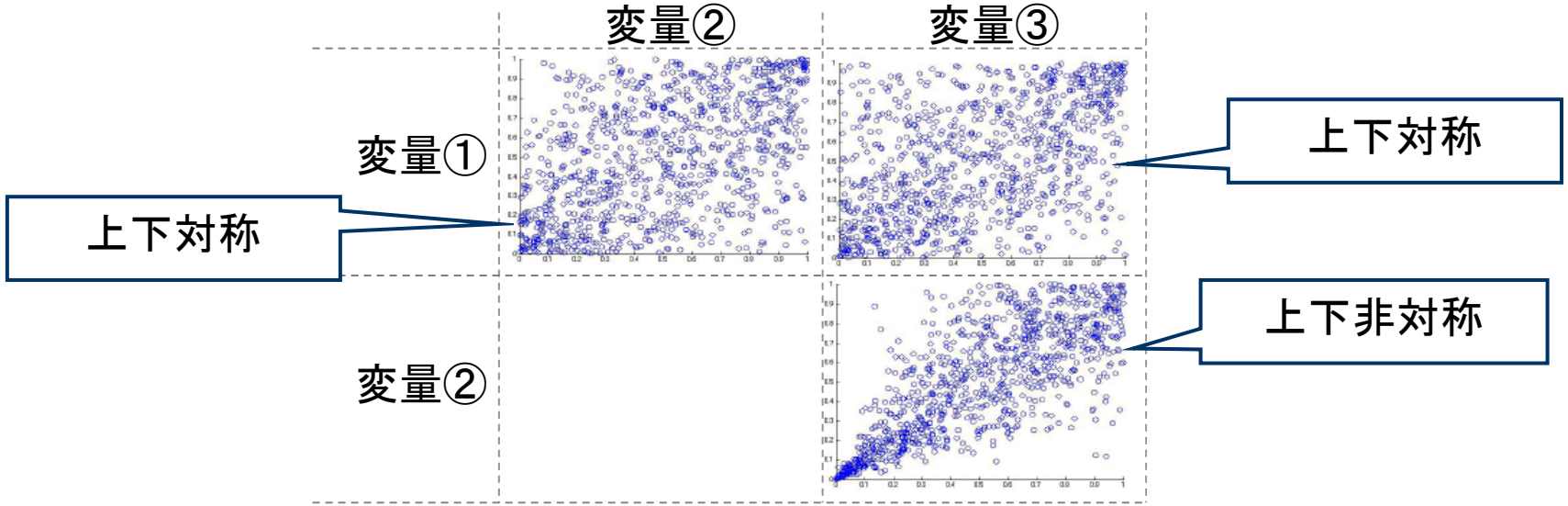


ガンベル・コピュラ

上下非対称な
依存構造

2-(2). 既存のコピュラの問題点

- 楕円コピュラ（正規、t）は上下対称
  - とくに正規コピュラでは裾の依存を捕捉することができない
- アルキメディアン・コピュラ（クレイトン、ガンベルなど）は少パラメータ数
  - 上下非対称の裾依存を表現可能であるが、何変量あろうとも1パラメータで表現
- 依存構造がペアによって異なる場合、対応できない

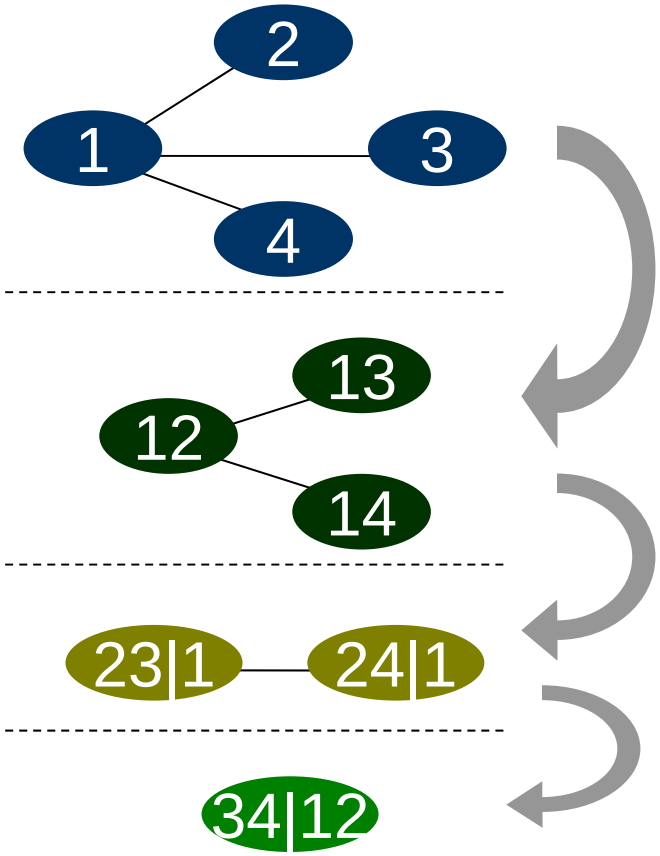


➡ ヴァイン・コピュラ（vine copula）

Bedford and Cooke (2002), Aas *et al*. (2009)

2-(3). ヴァイン・コピュラの性質

- 2変量ごとのコピュラ（ペア・コピュラ）をブドウの木（vine）のように結合



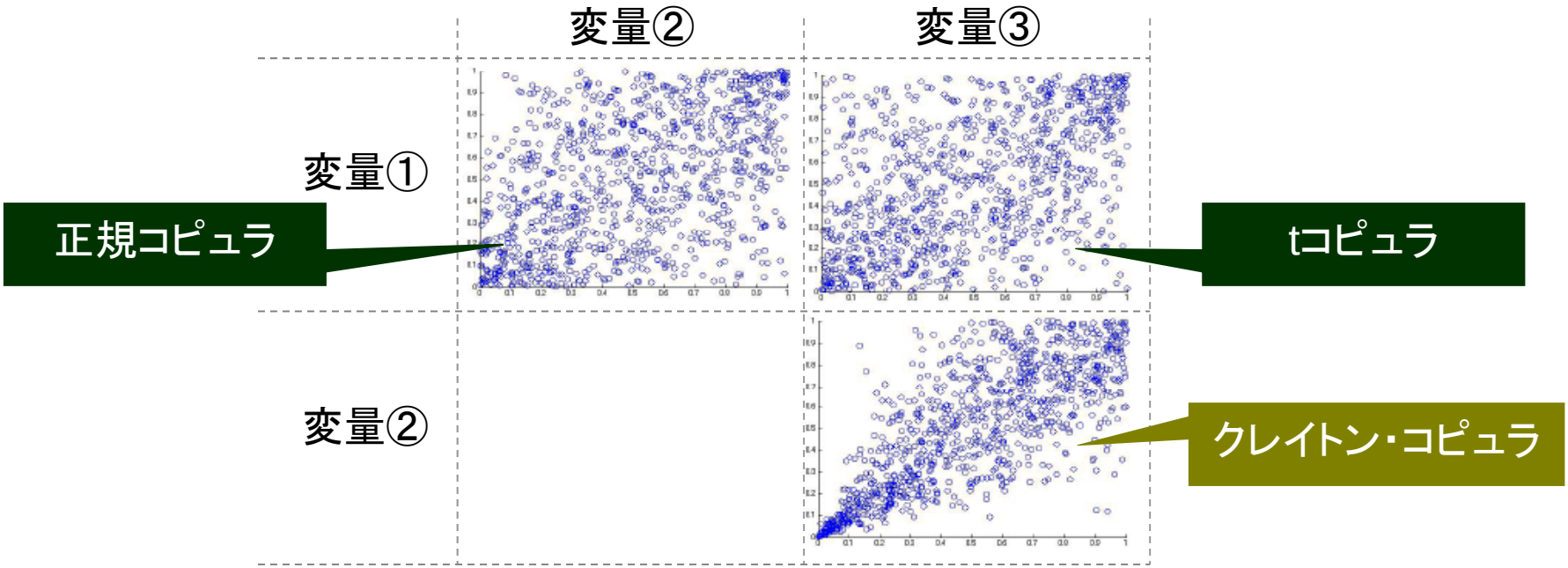
変量1を軸に1と2、1と3、1と4の依存構造を計測

変量1を条件とした後、変量2を軸に、2と3、2と4の依存構造を計測

変量1と2を条件とした後、変量3を軸に、3と4の依存構造を計測

2-(4). ヴァイン・コピュラの利点

- ２変量ごとに異なるコピュラを選択可能
  - 変量1と2は正規コピュラ、変量1と3はtコピュラで、変量2と3はクレイトン・コピュラで結合、など依存構造の柔軟な表現が可能



- 「多変量」かつ「上下非対称」な依存構造も表現可能

3-(1). コピュラの分布関数／密度関数

■ 同時分布関数 F とコピュラ C

$$F(x_1, \cdots, x_n) = C(F_1(x_1), \cdots, F_n(x_n))$$

$$x_i = F_i^{-1}(u_i), \quad u_i \sim U(0,1)$$

■ 密度関数

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \underbrace{c(F_1(x_1), \cdots, F_n(x_n))}_{\text{依存構造}} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)}_{\text{周辺分布}}$$

3-(2). ヴァイン・コピュラの密度関数

■ ヴァイン・コピュラの密度関数（例：4変量）

- ペア・コピュラの密度関数の積として依存構造を表現

$$
\begin{aligned}
& f_{1,2,3,4}(x_1, x_2, x_3, x_4) \\
& = \underline{c_{3,4|1,2}\left(F_{3|1,2}(x_3|x_1, x_2), F_{4|1,2}(x_4|x_1, x_2)\right)} \\
& \cdot \underline{c_{2,3|1}\left(F_{2|1}(x_2|x_1), F_{3|1}(x_3|x_1)\right)} \cdot \underline{c_{2,4|1}\left(F_{2|1}(x_2|x_1), F_{4|1}(x_4|x_1)\right)} \\
& \cdot \underline{c_{1,2}\left(F_1(x_1), F_2(x_2)\right)} \cdot \underline{c_{1,3}\left(F_1(x_1), F_3(x_3)\right)} \cdot \underline{c_{1,4}\left(F_1(x_1), F_4(x_4)\right)} \\
& \cdot \underline{f_1(x_1)} \cdot \underline{f_2(x_2)} \cdot \underline{f_3(x_3)} \cdot \underline{f_4(x_4)}
\end{aligned}
$$

依存構造

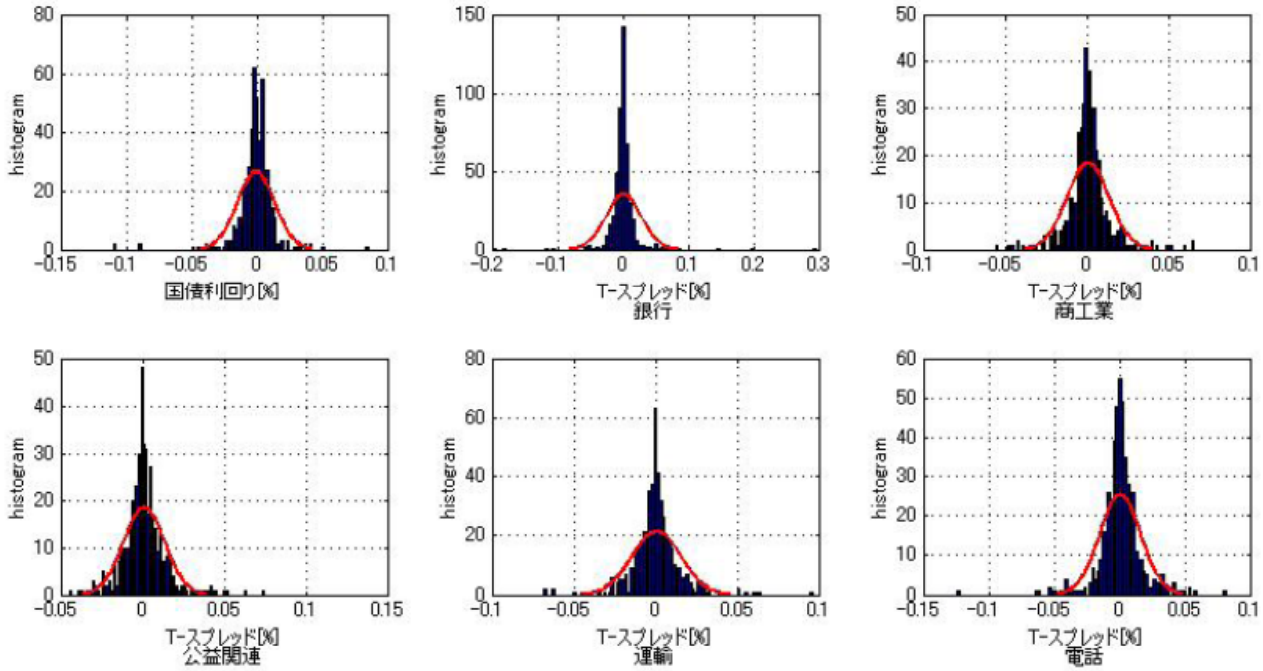
周辺分布

■ 各周辺分布と依存構造の2段階最尤推定

3-(3). 分析対象データ

■ 国債利回りとクレジット・スプレッド

- 2007年3月末から2009年3月末までの日次差分（データ数：490）
- 3ヶ月国債利回りと非国債セクターの対国債スプレッド（銀行、商工業、公益関連、運輸、電話）の計6変量をBloombergフェア・バリュー・コンポジットより
- 「質への逃避」と「クレジット・スプレッド拡大」が同方向になるように調整



3-(4). 周辺分布のパラメータ推定

■ 周辺分布

- 分布の裾の厚さ、自己相関、不均一分散を考慮
- AR(1)-GARCH(1,1)

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1 \Delta y_{t-1} + e_t$$

$$e_t = \sigma_t \epsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = K + G\sigma_{t-1}^2 + Ae_{t-1}^2$$

- イノベーション e_t に一般誤差分布（Generalized Error Distribution）を仮定
  ν が2より小さい場合、正規分布よりも裾の厚い分布

$$f_{\mathrm{GED}}(e_t; 0, \sigma_t, \nu) = \frac{1}{\sigma_t}\Omega\Psi^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\left|\frac{e_t}{\Psi\sigma_t}\right|^{\nu}\right)$$

$$\Omega = \nu\left(\Gamma\left(1/\nu\right)2^{1+\frac{1}{\nu}}\right)^{-1}, \quad \Psi = \left(\frac{2^{-2/\nu}\Gamma(1/\nu)}{\Gamma(3/\nu)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$e_t = \Delta y_t - (\beta_0 + \beta_1 \Delta y_{t-1}), \quad \sigma_t > 0, \quad \nu > 0$$

3-(5). 周辺分布のパラメータ推定結果

- 一般誤差分布の形状パラメータが2よりも小さく、正規分布よりも厚い裾を確認（パラメータ ν ）
- GARCH項（パラメータ G ）が1%有意水準で0との差が棄却され、分散が均一ではないことを確認

	β_0	β_1	K	G	A	ν
国債	-0.0007	0.1350	0.0000	0.8625	0.0800	0.8528
	(0.1124)	(0.0000)	(0.0733)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)
銀行	0.0003	0.0288	0.0000	0.8040	0.1649	0.6343
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0013)	(0.0000)	(0.0294)	(0.0000)
商工業	0.0009	-0.1016	0.0000	0.8880	0.0760	0.7931
	(0.0000)	(0.0000)	(0.1126)	(0.0000)	(0.3456)	(0.0000)
公益	0.0005	-0.0595	0.0000	0.9408	0.0409	0.8267
	(0.0000)	(0.0000)	(0.1968)	(0.0000)	(0.4039)	(0.0000)
運輸	0.0005	-0.0542	0.0000	0.7619	0.1766	0.7673
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)	(0.0009)	(0.0000)
電話	0.0003	-0.0546	0.0000	0.8680	0.1100	0.8118
	(0.0000)	(0.0000)	(0.1546)	(0.0000)	(0.2221)	(0.0000)

3-(6). 依存構造の推定に用いるコピュラ

- 依存構造の推定に8つのコピュラ
  - 楕円コピュラ
    - 正規
    - t
  - アルキメディアン・コピュラ
    - クレイトン
    - ガンベル（Rotated）
  - ヴァイン・コピュラ
    以下をペア・コピュラとするヴァイン・コピュラ
    - t
    - クレイトン
    - ガンベル（Rotated）
    - 正規、t、クレイトン、ガンベルの4つからそれぞれのペアに最適なコピュラ（以下、「ヴァイン・コピュラ（選択型）」とよぶ）

3-(7). 依存構造のパラメータ推定（ヴァイン・コピュラ）

■ 尤度関数はペア・コピュラの密度関数の積

- 依存構造パラメータを $\boldsymbol{\alpha}$ とすると、ヴァイン・コピュラの対数尤度関数は、

$$l_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-j}\sum_{t=1}^{T}\ln\Big[c_{j,j+i|1,\cdots,j-1}\big(F_{j|1,\cdots,j-1}(x_{jt}|x_{1t},\cdots,x_{j-1,t}) , F_{j+i|1,\cdots,j-1}(x_{j+i,t}|x_{1t},\cdots,x_{j-1,t});\boldsymbol{\alpha}_{j,j+i}\big)\Big]$$

■ ヴァイン・コピュラにおいては変量の順序の決定が必要

- 6 変量の全ての並べ方についてヴァイン・コピュラのパラメータ推定を実施し、その中で尤度が最大となる並べ方を採用
- ただし、国債利回りをベース金利とみなし、第1 変量として固定

3-(7). 依存構造のパラメータ推定（ヴァイン・コピュラ） （続き）

- h 関数（Aas *et al*.（2009））
  - パラメータ推定において h 関数が重要な役割
  - たとえば、x_1 と x_2 の h 関数は、x_1 を軸とした場合

$$
\begin{aligned}
F_{2|1}(x_2|x_1) &= \frac{\partial C\left(F_1(x_1), F_2(x_2)\right)}{\partial F_1(x_1)} \\
&= h(u_1, v_2; \boldsymbol{\alpha}_{12}) \\
&\quad (u_1 = F_1(x_1), v_2 = F_2(x_2))
\end{aligned}
$$

  - なお、楕円コピュラ（正規、t）は上式左辺より、アルキメディアン・コピュラ（クレイトン、ガンベルなど）は右辺より導出すると容易

3-(8). ヴァイン・コピュラのパラメータ推定手順

- ペア・コピュラごとにパラメータを推定し軸を更新
  - 例：3変量の場合
    - 準備：推定した周辺分布を通じ、原データを一様分布へと変換
    - ステップ1：x_1 と x_2、x_1とx_3 のペア・コピュラの対数尤度を最大化

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1 = \arg\max l_{c1}(\boldsymbol{\alpha}_1)$$

ただし、$\boldsymbol{\alpha}_1 = (\boldsymbol{\alpha}_{12}\ \boldsymbol{\alpha}_{13})$ として

$$l_{c1}(\boldsymbol{\alpha}_1) = \ln c_{1,2}\left(F_1(x_1), F_2(x_2); \boldsymbol{\alpha}_{12}\right) + \ln c_{1,3}\left(F_1(x_1), F_3(x_3); \boldsymbol{\alpha}_{13}\right)$$

3-(8). ヴァイン・コピュラのパラメータ推定手順 （続き）

- ステップ2：x_1を条件としたx_2とx_3のペア・コピュラの対数尤度を最大化

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \arg\max l_{c2}(\boldsymbol{\alpha}_2)$$

ただし、$\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_{23}$ として

$$l_{c2}(\boldsymbol{\alpha}_2) = \ln c_{2,3|1}\left(F_{2|1}, F_{3|1}; \boldsymbol{\alpha}_{23}\right)$$

$$\begin{aligned} F_{k|1} &= \frac{\partial C\left(F_1(x_1), F_k(x_k)\right)}{\partial F_1(x_1)} \\ &= h(F_1(x_1), F_k(x_k); \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{1k}) \quad (k = 2, 3) \end{aligned}$$

- ステップ3：対数尤度の合算

$$l(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = l_{c1}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1) + l_{c2}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1 \ \boldsymbol{\alpha}_2)$$

3-(9). パラメータ推定結果　ヴァイン・コピュラ（選択型）

- AICにより依存構造の当てはまりを判断
- ヴァイン・コピュラ（選択型）の当てはまりが良好
- 特に国債利回りと電話セクターのクレジット・スプレッド、および国債利回りと商工業セクターのクレジット・スプレッドとしてガンベル・コピュラが採用され、上下非対称の依存構造を確認

		公益	銀行	電話	商工業	運輸
国債	ペア・コピュラ	Gaussian	t	Gumbel	Gumbel	t
	パラメータ	0.4306	0.4565	1.2822	1.3034	0.3456
	自由度（t コピュラ）		4.4171			5.4603
公益	ペア・コピュラ		t	t	t	t
	パラメータ		0.4429	0.4121	0.4994	0.4798
	自由度（t コピュラ）		5.2953	12.2858	5.7285	4.5719
銀行	ペア・コピュラ			Gaussian	t	Gaussian
	パラメータ			0.1301	0.2633	0.1757
	自由度（t コピュラ）				7.1368	
電話	ペア・コピュラ				t	t
	パラメータ				0.3914	0.1314
	自由度（t コピュラ）				9.1802	16.8759
商工業	ペア・コピュラ					Gaussian
	パラメータ					0.0827
	自由度（t コピュラ）					

AIC：-946.8031

3-(10). パラメータ推定結果　ヴァイン・コピュラ(t)

- 次に当てはまりが良好だったのがtコピュラをペア・コピュラとするヴァイン・コピュラ
- ペアごとにtコピュラの裾の厚さ(自由度)が異なる様子を確認

		公益	銀行	商工業	運輸	電話
国債	パラメータ	0.4358	0.4565	0.3857	0.3456	0.3578
	自由度	35.3855	4.4171	10.5280	5.4603	16.8129
公益	パラメータ		0.4418	0.5057	0.4801	0.4252
	自由度		5.3142	5.4143	4.5340	9.3846
銀行	パラメータ			0.2734	0.1674	0.1338
	自由度			7.0252	85.1098	73.0617
商工業	パラメータ				0.1461	0.3843
	自由度				20.4171	9.8321
運輸	パラメータ					0.0874
	自由度					36.6442

AIC : -941.6862

4-(1). シミュレーション

- 各コピュラから発生させた異なる依存構造を持つパスのもとでのポートフォリオのリスク指標を観察
  - 国債利回りおよび各種スプレッドの日次差分データを推定結果に基づくモデルのもとで発生（250日分、10,000回）
  - 国債利回りおよび各種スプレッドを仮想的な割引債価格へと変換
  - 各コピュラに基づく等ウェイトポートフォリオのVaRを比較
  - 各コピュラに基づくCVaR最小化の結果を比較

- パラメータの推定と同様、乱数発生においても依存構造と周辺分布へ分割
  - 各コピュラから依存構造を持つ一様乱数を生成
  - 生成した一様乱数を周辺分布に入力し、依存構造と周辺分布の特徴を持つ乱数系列を生成

4-(2). ヴァイン・コピュラによる乱数発生

- 逆関数法を基本とする
- ただし、無条件分布関数（周辺分布）から乱数を生成する前に条件付分布関数の条件の解除が必要
  - 例：変量1を軸とする変量2の発生
    - 独立な一様乱数 u_1、u_2 を発生
    - x_1 を条件とする x_2 の条件付分布関数と u_2 が以下を満たす

$$
\begin{aligned}
u_2 = F_{2|1}(x_2|x_1) &= \frac{\partial C\left(F_1(x_1), F_2(x_2)\right)}{\partial F_1(x_1)} \\
&= h(u_1, v_2; \boldsymbol{\alpha}_{12}) \quad (u_1 = F_1(x_1), v_2 = F_2(x_2))
\end{aligned}
$$

    - 上式を v_2 について逆関数をとる

$$
v_2 = h^{-1}(u_1, u_2; \boldsymbol{\alpha}_{12})
$$

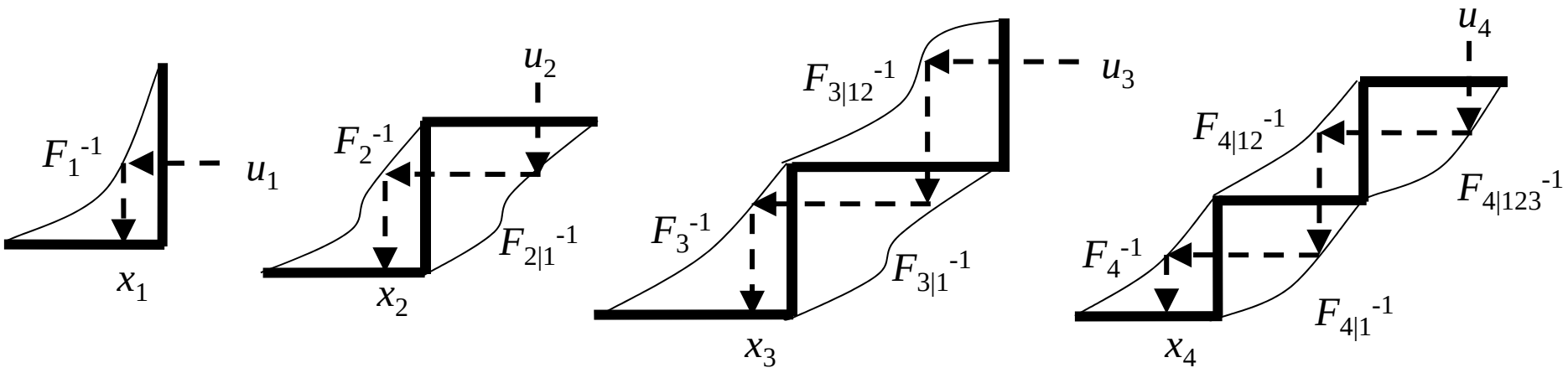
    - $v_2 = F_2(x_2)$ より、x_2 の無条件の分布関数の逆関数をとり x_2 を求める

$$
x_2 = F_2^{-1}(v_2)
$$

4-(2). ヴァイン・コピュラによる乱数発生 （続き）

■ ヴァイン・コピュラによる乱数発生の概念図

- 階段グラフ（staircase graph、Kurowicka and Cooke（2007））



4-(3). 一般誤差分布に従う乱数発生

- 各コピュラから発生させた依存構造を持つ一様乱数 v_t を一般誤差分布の分布関数の逆関数 F_{GED}^{-1} へ代入
  - 推定した周辺分布パラメータに基づき日次差分データを生成

$$\Delta y_t = \begin{cases} \tilde{\mu}_t - \tilde{\sigma}_t \Psi \left(F_{\chi^2}^{-1} \left(\frac{2}{\tilde{\nu}}, -2v_t + 1 \right) \right)^{\frac{1}{\tilde{\nu}}} & (v_t \leq \frac{1}{2}) \\ \tilde{\mu}_t + \tilde{\sigma}_t \Psi \left(F_{\chi^2}^{-1} \left(\frac{2}{\tilde{\nu}}, 2v_t - 1 \right) \right)^{\frac{1}{\tilde{\nu}}} & (v_t > \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$F_{\chi^2}^{-1}(\kappa, v)$: 自由度 κ のカイ2乗分布の分布関数の逆関数

$$\Psi = \left(\frac{2^{-2/\tilde{\nu}} \Gamma(1/\tilde{\nu})}{\Gamma(3/\tilde{\nu})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

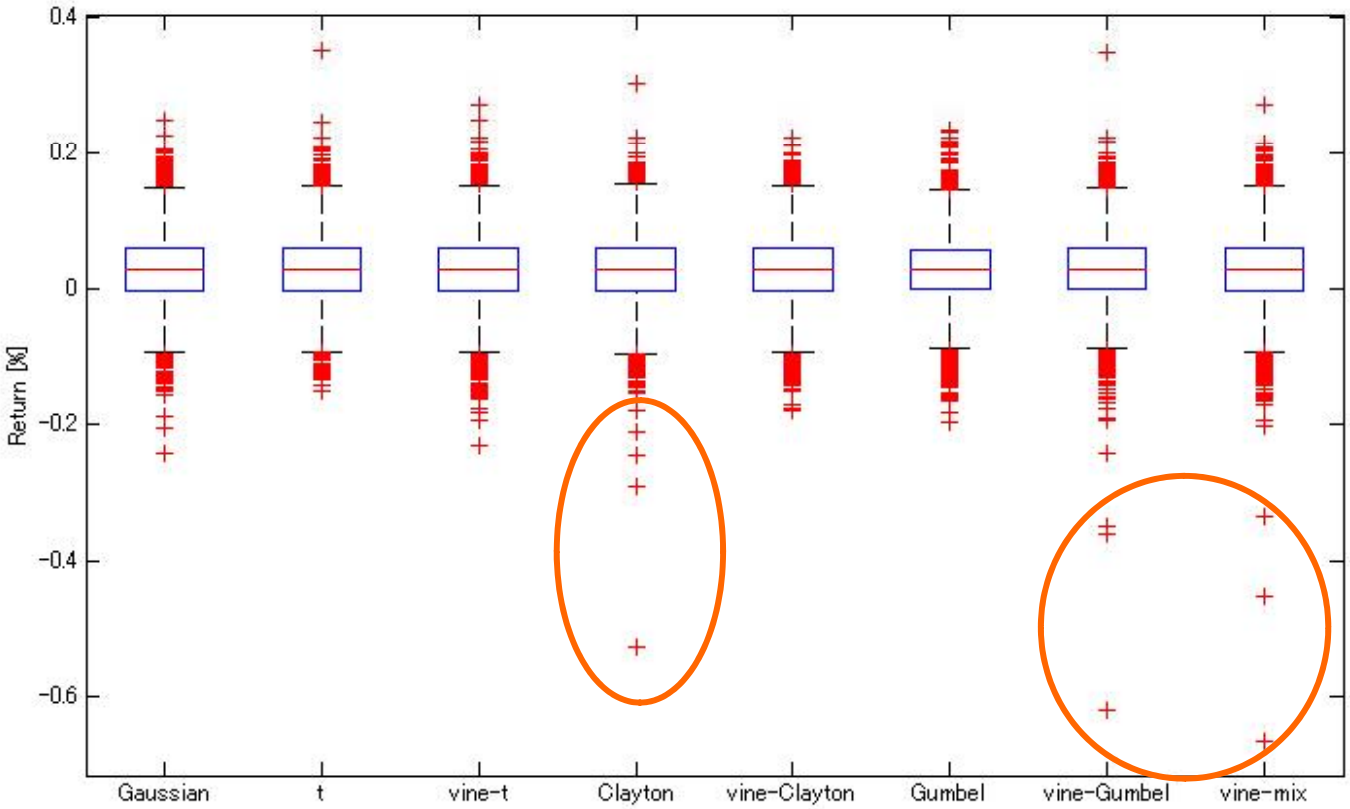
$$\tilde{\mu}_t = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \Delta y_{t-1}$$

$$\tilde{\sigma}_t^2 = \tilde{K} + \tilde{G} \tilde{\sigma}_{t-1}^2 + \tilde{A} \tilde{e}_{t-1}^2$$

$$\tilde{e}_t = \Delta y_t - (\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \Delta y_{t-1})$$

4-(4). コピュラの違いによるVaRの比較

- 等ウェイト・ポートフォリオにおけるVaRの計測
- 正規コピュラ（左）よりも裾が厚い負のリターンを表現



- 正規コピュラでは裾での下方リスクを表現しきれず、VaRが過小推計となる

4-(5). コピュラの違いによるCVaR最小化ポートフォリオ

- 各コピュラに基づくCVaRの最小化
- 95%水準ではVaR、CVaRともに正規コピュラと他のコピュラに大差はないが、99%水準では大きな差が見られた
- tコピュラではヴァイン・コピュラによってペアごとに異なる裾の厚さを持たせた結果、CVaRが上昇した

	95 % CVaR	95 % VaR
正規	0.0580 %	0.0350 %
t	0.0546 %	0.0317 %
ヴァイン（t）	0.0573 %	0.0328 %
クレイトン	0.0585 %	0.0338 %
ヴァイン（クレイトン）	0.0560 %	0.0330 %
ガンベル	0.0584 %	0.0343 %
ヴァイン（ガンベル）	0.0563 %	0.0321 %
ヴァイン（選択型）	0.0573 %	0.0342 %

	99 % CVaR	99 % VaR
正規	0.0947 %	0.0708 %
t	0.0973 %	0.0700 %
ヴァイン（t）	0.1553 %	0.0886 %
クレイトン	0.1936 %	0.1112 %
ヴァイン（クレイトン）	0.0911 %	0.0709 %
ガンベル	0.1998 %	0.0998 %
ヴァイン（ガンベル）	0.1342 %	0.0821 %
ヴァイン（選択型）	0.1728 %	0.0947 %

5. まとめ

＜国債利回りおよびクレジット・スプレッドの変動について＞

- 正規分布よりも裾が厚いことを確認
- 利回りおよびスプレッドのボラティリティが期を通じて均一ではないことを確認

＜国債利回りおよびクレジット・スプレッドの依存構造について＞

- 一部の利回りおよびクレジット・スプレッドの間に上下非対称の依存構造があり、相場の上昇時と下落時で異なる依存度合いがあることを確認

＜コピュラの違いがリスク指標へ与える影響について＞

- 裾に行くほど正規コピュラによる下方リスクの過小推計の傾向が強いことを確認
- 上下非対称の依存構造およびこれを含むヴァイン・コピュラを用いることでポートフォリオの下方リスクの過小推計を回避することが可能であることを確認

主要参考文献

- M. Aas, C. Czado, A. Frigessi, and H. Bakken. Pair-copula Constructions of Multiple Dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 44, pp.182–198, 2009.

- T. Bedford and R. M. Cooke. Vines - A New Graphical Model for Dependent Random Variables. *Annals of Statistics*, Vol. 30, pp. 1031–1068, 2002.

- D. Kurowicka and R. M. Cooke. Sampling Algorithms for Generation Joint Uniform Distributions using the Vine Copula Method. *Computational Statistics and Data Analysis*, Vol. 51, pp. 2889–2906, 2007.

- 戸坂凡展, 吉羽要直. コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説. 日本銀行金融研究所IMES DISCUSSION PAPER SERIES, 2005.