



Hitotsubashi ICS-FS Working Paper Series

FS-2017-J-001

多次元 Hawkes 過程を用いた倒産リスク伝播構造の推定 - Hawkes グラフ表現による視覚化-

監物 輝夫

一橋大学大学院 国際企業戦略研究科 修了生

中川 秀敏

一橋大学大学院経営管理研究科

First version: 2017 年 5 月 24 日

Current version: 2019 年 2 月 28 日

All the papers in this Discussion Paper Series are presented in the draft form. The papers are not intended to circulate to many and unspecified persons. For that reason any paper can not be reproduced or redistributed without the authors' written consent.

多次元 Hawkes 過程を用いた倒産リスク伝播構造の推定*

- Hawkes グラフ表現による視覚化-

監物 輝夫[†] 中川 秀敏[‡]

2019年2月28日

概要

Hawkes 過程を用いたイベント発生モデル化はファイナンス分野でも近年注目されている。本研究では、日本における比較的長期の倒産履歴データを対象に、業種および企業規模に基づいて倒産発生イベントを複数のイベントタイプに分類し、そのうえで、多次元 Hawkes 過程を用いて倒産発生伝播構造をモデル化する。Hawkes 過程に付随する強度過程を特徴づける手法として、指数減衰型カーネル関数を仮定して最尤法で推定する従来からの手法に加えて、Embrechts and Kirchner [3] によって提唱されたノンパラメトリックな推定法の適用を試みる。この二つの手法による多次元 Hawkes 過程の強度過程の推定結果を Hawkes グラフ表現を用いた視覚化によって比較・考察を行い、Embrechts-Kirchner の推定法が多次元 Hawkes 過程を用いた倒産発生伝播モデルに対して応用可能性があることを確認する。

1 はじめに

一般に、Hawkes 過程とは（単一あるいは複数のタイプの）イベントの累積発生件数をカウントする確率過程であり、イベント発生確率を特徴づける「強度過程」に自己励起性（あるイベント発生によって同タイプの強度がジャンプする）や相互励起性（あるイベント発生によって別のタイプの強度がジャンプする）といった性質を持っていることが特徴である。Hawkes 過程は、Hawkes [6] が集団間の伝染病の伝染メカニズムのモデル化などの応用を念頭において提唱したとされている。日本では、尾形が1980年代に Hawkes 過程に関連する理論的な研究 ([8]) に貢献した一方で、地震（余震）発生メカニズムのモデル化への応用研究 ([9]) でも貢献した実績が認められている。

ファイナンス関連という点では、Hawkes 過程を信用リスク計量に応用した先行研究の一つとして Errais et al. [4] が挙げられる。同論文では、信用ポートフォリオ内のデフォルトイベント伝播を対象にして、Hawkes 過程やその拡張として拡散項を含むジャンプ・アフィン強度過程に基づくモデルに対する実証分析を行っている。また、中川 [11] や Yamanaka et al. [10] などでは、主に日本企業の R&I の格付変更アナウンスを対象イベントとして Hawkes 過程による格付変更モデルの分析を行っている。さらに、最近では株式や先物市場での取引や価格変化をイベントとして、高頻度取引データの適用を意図した Hawkes 過程の取引モデルへの応用が増えてきている (Bacry et al. [2] を参照のこと)。

このように、Hawkes 過程によるイベント発生モデル化はファイナンス分野でも近年注目されてい

* 本研究は JSPS 科研費 JP26330026, JP17K01248 の助成を受けて行われたものである。なお本稿は、元表題「Hawkes グラフによる倒産リスクの伝播構造の推定」の論文を改訂したものである。

[†] 一橋大学大学院 国際企業戦略研究科 修了生

[‡] 一橋大学大学院 経営管理研究科

る中で、Embrechts and Kirchner [3] は、イベントタイプが多数ある場合を念頭にして Hawkes 過程がもつ自己励起性や相互励起性の様子を「Hawkes グラフ」と名付けられた重み付き有向グラフを用いて視覚化するアイデアを示し、そのために高次元の Hawkes 過程モデルの強度過程推定における計算負荷が軽減されるような推定アルゴリズムを提唱している。

従来はイベント発生強度をモデル化する際に、パラメトリックな関数を具体的に与えてパラメータの最尤推定を行うことが多かったが、Kirchner [7] は、イベント発生強度過程の推定の問題を INAR モデル^{*1}と呼ばれる整数値の AR モデルの係数推定問題に関連づけることで、強度過程を特徴づける「カーネル関数」の推定値を線形代数計算に帰着してノンパラメトリックに求める手法とその理論的枠組みを与えている。

Embrechts and Kirchner [3] では、多次元 Hawkes 過程に付随する強度過程をこのノンパラメトリック推定手法で近似的に推定して、同じタイプ内のイベント発生の自己励起性や異なるタイプ間のイベントの相互励起性を端的に表現する「Hawkes グラフ」という重み付き有向グラフをアウトプットする推定アルゴリズム（Embrechts-Kirchner の推定法と呼ぶことにする）を提案している。

本研究では、日本における比較的長期の倒産履歴データを対象に、倒産発生イベントを業種および企業規模に基づき複数カテゴリに分類することで複数のイベントタイプを作り、その上で Embrechts and Kirchner [3] によって提唱された多次元 Hawkes 過程モデルの強度過程のノンパラメトリックな推定手法を適用し、業種あるいは企業規模に関するカテゴリ間での倒産発生の伝播構造を視覚化し、業種および企業規模に基づくカテゴリ間での倒産発生の自己励起性や相互励起性を考察することを試みる。

具体的には、多次元 Hawkes 過程による倒産発生モデルについて、過去 10 数年間の日本企業の倒産履歴データを用いて、(1) 強度過程を指数減衰型カーネル関数で特徴付けてパラメータを最尤推定する従来型のアプローチと、(2) 本稿で新たに導入するノンパラメトリックな Embrechts-Kirchner の推定法、の二つの手法でそれぞれ推定し、その推定結果をグラフを用いて視覚化し（これを「Hawkes グラフ表現」と呼ぶことにする）、両推定手法が示唆する倒産発生の自己励起性や相互励起性について比較・考察を行う。前述したように、Embrechts-Kirchner の推定法は、多数のイベントタイプや大きなサイズのデータを扱う応用領域への適用を念頭に考えられているが、倒産のような低頻度なイベントでカテゴリ数も少ない場合に対しても十分に適用可能であることを確認する。

また、Embrechts and Kirchner の推定アルゴリズムを実際のデータに対して適用する際には、いくつかのチューニング・パラメータの設定が必要であるが、そうしたチューニング・パラメータの違いによる推定結果の影響についても調査する。

2 分析データについて

本研究における事例研究の対象データは、(株)東京商工リサーチが集計した 2003 年 1 月 1 日から 2015 年 12 月 31 日まで (4,748 日分) の間に発生した倒産事例データである。ただし、倒産時負債総額 10 億円以上という条件でスクリーニングを依頼してデータを入手している。

次に、以下のような条件に沿って元データを整理した。

- 「関東（東京・神奈川・千葉・埼玉）」「関西（大阪・京都・兵庫・奈良）」「その他（の地域）」に区分する
- 同じ倒産発生日の関連企業（＝代表者が同じ企業）の倒産事例は、負債総額などを一つのサンプル

^{*1} 「INteger-valued AutoRegression モデル」の略。

表1 「関東」「関西」「その他」の各地域区分ごとの業種カテゴリおよび企業規模カテゴリにおける倒産発生件数

	関東				関西				その他			
	小企業	中企業	大企業	(計)	小	中	大	(計)	小	中	大	(計)
製造	149	471	102	722	113	363	37	513	350	1104	83	1537
インフラ・流通	214	293	208	715	98	184	96	378	245	352	202	799
金融	323	83	65	471	152	28	18	198	282	55	18	355
サービス	136	93	177	406	62	58	81	201	354	276	326	956
(計)	822	940	552	2314	425	633	232	1290	1231	1787	629	3647

ルとしてまとめる*2

- 「資本金」「従業員数」「負債総額」「倒産原因」「倒産形態」がエラー値のものを除外する*3

さらに、このデータに含まれる倒産企業を、以下のように業種および企業規模に関してカテゴリ区分をする。

まず、業種に関しては、東京商工リサーチが与えた業種区分に基づいて、倒産企業を「製造関係」「インフラ・流通関係」「金融関係」「サービス関係」の4つの業種カテゴリに区分している*4。

また、企業規模に関しては、最初に「中小企業基本法第二条第五項」における小規模企業者の定義に当てはまる倒産企業群を「小企業」として区分し、次に「中小企業基本法第二条第一項」に当てはまる企業群から先に区分した小企業群を除いた企業群を「中企業」として区分し、これらの定義に該当しない残るその他の企業を「大企業」と区分して、3つの企業規模カテゴリを作っている*5。

以上の条件で元データを整理し、「関東」「関西」「その他」という各地域区分ごとに業種カテゴリおよび企業規模カテゴリで倒産発生件数のクロス集計を行った結果を表1で表している。

本稿では、事例研究の端緒として、地域別の中ではサンプル数が多い関東地区のデータに限定して倒産リスクの依存構造の分析を行うことにする。図1は、(株)東京商工リサーチの元データを整理した後の、カレンダーベースでの関東地区の日次での倒産発生件数の推移(左は業種別カテゴリ、右は企業規模別カテゴリ)を表したものである。また、付録A節には、関東地区の倒産企業のうち負債総額が上位20の企業一覧をまとめておいた。

これを概観する限りでは、業種や企業規模によっては倒産が集中している時期が確認でき、倒産リスクの自己励起性が存在するかどうかを調査する意義があると考えられる。また、異なる業種カテゴリ間あるいは異なる企業規模カテゴリ間での倒産リスクの伝播の存在については明確に断定はできないが、分析を通じて調査する意義は十分にあると考えられる。

なお、連続時間モデルによる分析を行うことになるため、倒産発生時点を連続時間上にマッピングする必要がある。ただし、倒産発生は発生年月日しか特定できないことと、同じ日に複数の倒産発生が観測されることがある(実際にあった)ことに注意しなければならない。

本研究では営業日ベースで倒産発生が起こっているという想定のもとで、1年間を一律1/365単位とする時間幅に分割して、データ起点の2003年1月1日を $t = 0$ 、終点の2015年12月31日が

*2 例えば、2008年9月16日に倒産発生と記録された「リーマン・ブラザーズ証券」「リーマン・ブラザーズ・ホールディングス」「リーマン・ブラザーズ・コマーシャル・モーゲージ」の場合や、2010年1月19日に倒産発生と記録された「日本航空」と「日本航空インターナショナル」の場合などは1件の倒産事例としてまとめた。

*3 倒産時負債総額10億円以上という条件でスクリーニングを依頼したが「負債総額」が欠損しているものも含まれていた。

*4 「製造」には農林業・漁業、「インフラ・流通」には情報通信業、運輸業、卸売業、小売業、「金融」には不動産業、といった業種が含まれている。なお、元データの段階では、業種カテゴリ別の倒産発生件数は、製造関係が1,798件、インフラ・流通関係が2,098件、金融関係が1,366件、サービス関係が1,866件であった。

*5 なお、元データの段階では、その結果、企業規模カテゴリ別の倒産発生件数は、小企業が2,633件、中企業が3,431件、大企業が1,445件であった。

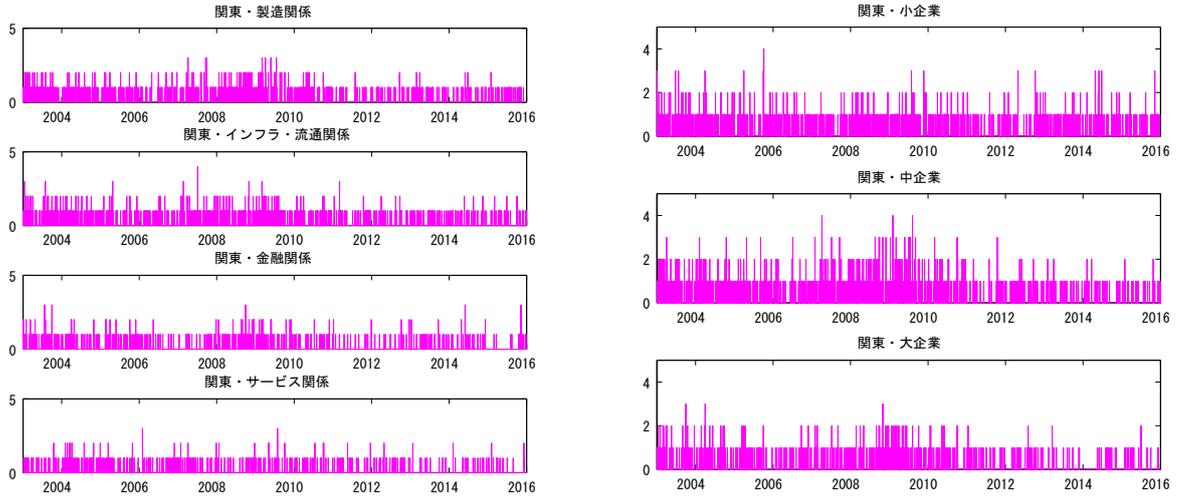


図1 (株)東京商工リサーチの倒産履歴データを整理した後の、カレンダーベースでの関東地区の日次での倒産発生件数の推移。左は業種別カテゴリ、右は企業規模別カテゴリによるもの。横軸は2003年1月1日を起点にカレンダーベースでの経過日数(計4748日分)

$t = T := 13.00548$ となるように定めた。その上で、倒産発生日を起点日からの経過日数 k (整数) に対して $k/365$ として連続時間にマッピングした。また、複数の倒産が(同じカテゴリ内で)発生した場合は同時点での発生件数を「マーク変数」として扱うことにした。

3 多次元 Hawkes 過程による倒産発生モデル

当節では、まず一般的な多次元 Hawkes 過程の定義を確認し、倒産発生の依存関係をモデル化する際の Hawkes 過程のカーネル関数の定式化についてまとめておく。次に、倒産発生モデルを多次元 Hawkes 過程で定式化することの妥当性を議論する。最後に、Embrechts and Kirchner [3] が与えた「Hawkes スケルトン」および「Hawkes グラフ」の概念を整理・簡略化して「Hawkes グラフ表現」の定義を与える。

3.1 多次元 Hawkes 過程

適当なフィルター付き完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ を与える。 $m \in \mathbb{N}$ 種類のイベントを対象にする。ここで1から自然数 n までの集合を $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ のように表すことにする。

各イベント $j \in [m]$ に対して、 \mathbb{F} -適当な点過程(停止時刻の増大列) $\{\tau_k^j\}_{k \in \mathbb{N}}$ を考える。すなわち、 τ_k^j をタイプ j のイベントが k 回目に発生する \mathbb{F} -停止時刻と見なし、 \mathbf{P} -a.s. に $0(=\tau_0^j) < \tau_1^j < \tau_2^j < \dots$ が成り立つとする。

さらに、各イベント $j \in [m]$ に対して、点過程 $\{\tau_k^j\}_{k \in \mathbb{N}}$ に付随する計数過程を $N_t^j := \sum_{k \geq 1} \mathbf{1}_{\{\tau_k^j \leq t\}}$ と定義し、まとめて $\mathbf{N}_t = (N_t^1, \dots, N_t^m)^\top$ と表す。

このとき、一般に、多次元 Hawkes 過程は次のような強度過程で特徴づけられる計数過程として定義される (Bacry et al. [2] の Definition 1 などを参照)。

定義 1 (多次元 Hawkes 過程). m -次元 計数過程のベクトル \mathbf{N}_t が m -次元 Hawkes 過程であるとは、

各 $j \in [m]$ に対して N_t^j に付随する強度過程*6が

$$\lambda_t^j = \mu^j + \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^t h_{i \rightarrow j}(t-s) dN_s^i \quad (1)$$

で与えられるものをいう。ただし、 $\mu^j \geq 0$ はタイプ j の「外生強度 (*exogenous intensity*)」、 $h_{i \rightarrow j}(u)$ は「カーネル関数 (*kernel function*)」と呼ばれる、任意の $(i, j) \in [m]^2$ に対して非負値の確定的な可積分関数で、 $u < 0$ のときは $h_{i \rightarrow j}(u) \equiv 0$ を満たすものとする*7。

(1) 式における積分項の被積分関数 $h_{i \rightarrow j}(t-s)$ は具体的には「時点 s で発生したタイプ i のイベントが、タイプ j のイベント発生強度に与えたインパクトが時点 t では（すなわち $t-s$ だけ経過後に）どの程度残っているか」を表していると解釈できる。したがって、(1) から分かるように、Hawkes 過程は強度過程のカーネル関数の形をどのように与えるかによって特徴づけられる。

5 節においては、倒産発生の依存関係をモデル化する際に Hawkes 過程のカーネル関数 $h_{i \rightarrow j}(t-s)$ を次の 2 通りの方法で特徴付け、2 節で述べた日本の関東地区の倒産履歴データに対する両アプローチの分析結果（推定された依存関係および事後的なイベント発生強度の推移）を比較・考察する。

1. Hawkes [6] でも例示され、これまでも多くの応用例がある「指数減衰型カーネル関数」を仮定して、パラメータを最尤推定する方法。具体的には、 $(i, j) \in [m]^2$ に対して、指数減衰型カーネル関数 $h_{i \rightarrow j}(u) = \xi^{i \rightarrow j} e^{-\kappa^j u}$ （ただし、 $\xi^{i \rightarrow j} \geq 0, \kappa^j > 0$ とする）を仮定し、「倒産時点」をデータとしてパラメータ $\{\xi^{i \rightarrow j}\}_{(i,j) \in [m]^2}, \{\kappa^j\}_{j \in [m]}$ を最尤推定する。
2. カーネル関数の形は特定せず、Kirchner [7] が提唱したノンパラメトリックな手法で推定する方法。より具体的には、「単位期間ごとの倒産件数」をデータとし、翌単位期間における倒産件数を整数値の AR モデル（「INAR モデル」と呼ばれる）で近似的に表現できると仮定して、「(単位期間ごとの) 離散時点上のカーネル関数の推定値」を線形代数の演算によって計算する。

前者の指数減衰型カーネル強度過程のパラメータの最尤推定法については、4.1 節で、後者の Kirchner [7] のノンパラメトリックな推定法については、4.2 節で、それぞれ詳細に説明する。

3.2 倒産発生モデルを多次元 Hawkes 過程で定式化することの妥当性について

倒産発生モデルとして、Hawkes 過程を適用することは妥当であるかという議論は当然発生する。なぜなら、(1) 式で与えられる Hawkes 過程の強度過程を倒産発生の強度モデルと仮定することは、あるカテゴリ内の倒産発生リスクを上昇させるのは、いずれかのカテゴリで実際に倒産が発生したことによる自己励起性あるいは相互励起性だけであると仮定することに等しいからである。

例えば、Azizpour et al. [1] によると、米国の社債市場のデフォルト・クラスタリングの要因説明のための強度モデルとして、以下のような強度モデルを用いて実証分析を行っている。Azizpour et al. [1] では（業種などでのカテゴリ分けによる分析を行っているわけではなく）負債を Moody's 社に格付さ

*6 非負値（発展的可測）過程 λ_t^j が計数過程 N_t^j の強度過程であるとは、 $N_t^j - \int_0^t \lambda_s^j ds$ が \mathbb{F} -（局所）マルチンゲールになることと定義される。

*7 Kirchner [7] では、 $\mu^j, h_{i \rightarrow j}(u)$ をそれぞれ baseline intensity, excitement function と呼んでいる。また、Embrechts and Kirchner [3] では μ^j を immigration intensity と呼んでいる。本稿では Bacry et al. [2] の呼び方に即した訳語を用いている。

れている企業群に対する倒産発生強度 λ_t として、以下のような定式化のものを考えている：

$$\lambda_t = \exp \left(a_0 + \sum_{i=1}^d a_i X_{i,t} \right) + Y_t + Z_t.$$

ただし、 $(X_{1,t}, \dots, X_{d,t})$ は、 d 種類の観測可能な（マクロの）説明変数群であり、 Y_t は伝播 (contagion) 効果を現す項でマーク付きで指数減衰カーネル関数をもつ Hawkes 過程として

$$Y_t = b \sum_{n:T_n \leq t} e^{-\kappa(t-T_n)} \max\{0, \log u_n\},$$

と表されるもの (T_n, u_n はそれぞれ n 番目のデフォルト発生時とその時点のデフォルト負債合計額面)、また Z_t は潜在変数 (frailty) 項で、平均回帰性をもつ金利の CIR モデルと同じように

$$dZ_t = k(z - Z_t)dt + \sigma \sqrt{Z_t} dW_t,$$

という確率微分方程式を満たすもの、と仮定している。

Azizpour et al. [1] の結論を要約すると、米国の社債市場のデフォルト・クラスタリングの要因説明には、観測可能な説明変数と frailty 項だけでは不十分であるが、contagion 項まで加えると十分に説明可能である、ということになる。

これに対し、本研究では複数カテゴリを対象にしたモデル化に取り組むという点では Azizpour et al. [1] より進展はあると言えるが、採用した強度モデルに関しては Azizpour et al. [1] のモデルにおける観測可能な説明変数による項および frailty 項は含めずに、contagion 項だけを (1) のようにより素朴な形で用いることになる。これは、Hawkes グラフを提唱する Embrechts and Kirchner [3] の強度モデルに整合させることで、推定法をそのまま踏襲できるようにすることを選択したためである。

当然、倒産発生リスクをとらえるモデルを作ることを目的とするのであれば、少なくとも観測可能なマクロ経済説明変数を含む強度モデルを用いた分析が必要となることは間違いない。本来マクロ経済変数や潜在変数の動きによって捕捉されるはずの倒産リスクの伝播性が、(1) 式の Hawkes 過程の強度モデルの外生強度 μ^j やカーネル関数 $h_{i \rightarrow j}(u)$ の推定値として無理な形で表出される可能性は大きい。

しかしながら、Azizpour et al. [1] の結果を見ても、政府統計、株価指数、金利といった 10 程度の観測可能なマクロ説明変数群をいくつか与えた分析もしているものの、最終的には GDP 成長率だけを採用して強度モデルの推定を行っている。このことは、強度モデルを説明するのに適したマクロ経済変数の見極めが非常に困難であることを示唆している。実際に、この方向での倒産リスク計量モデルの精度追究そのものが一つの大きな研究課題として続いている。

一方で、Hawkes グラフという手法によって得られる倒産リスクの依存関係の結果の考察を通じて、前述した強度モデルを説明するマクロ経済変数の見極めという問題に対しても、何らかの知見が得られることが期待できる。

そのため、(1) 式で与えられる強度モデルに基づく倒産履歴データ分析も十分に意義があると考え、今回の研究では Embrechts and Kirchner [3] が提唱した推定手法を修正・改良する必要があるような強度モデルの拡張には着手しない。

したがって、後述する分析結果およびその考察は、あくまでもマクロ経済変数や潜在変数の動きを明示的に織り込まない場合に可視化されるリスクの伝播構造の様子であることを注意する必要がある。

3.3 Hawkes グラフ表現

多次元 Hawkes 過程の強度過程 (1) 式を用いて各タイプの倒産発生強度をモデル化する場合、最も関心があるのは倒産イベントの自己励起性や相互励起性が認められるかどうか、すなわちカーネル関数 $h_{i \rightarrow j}(u)$ が恒等的に 0 でないかどうか、ということである。また、カーネル関数の形状を把握することも、倒産イベントの瞬間的インパクトおよび時間的持続性を示唆することから重要である。

しかしながら、 m 種類のイベントを対象にした場合、最大でカーネル関数は m^2 個考えることになり、 m が大きくなると全てのカーネル関数を一目で把握し、比較することは難しくなる。また、単純にどのタイプの自己励起性が強い、あるいはどこどここのタイプ間の相互励起性が強い、ということをも多くのイベントタイプに対しても端的に把握できれば十分に有用である。

そのためには、Embrechts and Kirchner [3] などで提唱された、自己励起性や相互励起性の「存在」と「大きさ」を有向グラフを用いて表現することが有用であると考えられる。

その際に、カーネル関数そのものではなく、以下のように「カーネル関数の時間に関する積分値」すなわち

$$a_{i,j} := \int_0^{\infty} h_{i \rightarrow j}(t) dt \quad (2)$$

を尺度として、タイプ i のイベント発生がタイプ j のイベント発生強度に対する自己励起性 ($i = j$ のとき) あるいは相互依存性 ($i \neq j$ のとき) の大きさを測ることにする。 $a_{i,j}$ からは時間変化に対する情報は失われるが、全体としてのインパクトの大きさが一目で把握できるので、有向グラフに付加する情報として十分であると考えられる。

以下では、Embrechts and Kirchner [3] による「Hawkes グラフ」の定義*8 を簡略化して与える。ただし、本稿ではおよび「Hawkes グラフ」という特別の表現法があるのではなく、あくまで一般的な m -次元 Hawkes 過程を視覚化する一形式だということを強調するため「Hawkes グラフ表現」という表記にする。

定義 2 (Hawkes グラフ表現). m -次元 Hawkes 過程 N_t の (1) 式で与えられる強度過程が、外生強度 $\{\mu^j\}_{j \in [m]}$ および (2) で定義されるカーネル関数の時間に関する積分値 $a_{i,j}$ で特徴付けられるとする。

$a_{i,j}$ を「辺の重み (edge weight)」と呼ぶ*9。

このとき、 m -次元 Hawkes 過程 N_t に対する **Hawkes グラフ表現**とは、頂点および辺に、正の値をとる「外生強度」および「辺の重み」がそれぞれ付加された「重み付き有向グラフ」 $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ で、頂点の集合 \mathcal{V} および辺の集合 \mathcal{E} がそれぞれ以下で与えられるものとして定義する：

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \{(j; \mu^j) \mid j \in [m] \text{ satisfying } \mu^j > 0\} \cup \{j \mid j \in [m] \text{ with } \mu^j = 0\}, \\ \mathcal{E} &:= \{(i, j; a_{i,j}) \mid (i, j) \in [m]^2 \text{ s.t. } a_{i,j} > 0\}. \end{aligned}$$

Hawkes グラフ表現は、本研究における倒産リスクの依存関係の文脈でいえば、業種別あるいは企業規模別に区分したときの各カテゴリを頂点として、倒産発生の自己励起性や相互励起性が存在すると推定されるカテゴリ (頂点) 同士を有向線分 (矢印) で結んで表現されることになる。5 節では、倒産履歴データを用いて推定された多次元 Hawkes 過程を Hawkes グラフ表現を用いて視覚化する。

*8 Embrechts and Kirchner [3] の Section 2.2 の Definition 6 を参照。

*9 Embrechts and Kirchner [3] では、Galton-Watson 型分枝過程との関連性から $a_{i,j}$ を branching coefficient とも呼んでいる。本稿ではグラフ表現した際に意味が分かりやすい呼び方を採用している。

4 多次元 Hawkes 過程のカーネル関数の特徴づけと推定法

当節では、3.1 節の最後で触れた、本研究で用いる (1) 式のカーネル関数に対する 2 つの特徴付け (1) 強度過程を指数減衰型カーネル関数で特徴付けてパラメータを最尤推定する従来型のアプローチと、(2) 本稿で新たに導入する Embrechts and Kirchner のノンパラメトリックな推定法、およびその推定結果を Hawkes グラフ表現する方法について説明する。

まず、Hawkes [6] のオリジナル論文でも例として挙げられ、Hawkes 過程の応用研究でよく見られる「指数減衰型カーネル関数」による定式化を紹介し、そのパラメータを最尤推定する方法を提示する。

次に、Embrechts and Kirchner [3] が提唱した、Kirchner [7] によるノンパラメトリックなカーネル関数の推定手法、およびその推定結果に基づく Hawkes グラフ表現の導出法を説明する。Embrechts and Kirchner [3] の推定法は、具体的には、離散時点でのカーネル関数および外生強度の推定値を成分にもつ行列（「Hawkes 推定量」と呼ばれる）およびその推定値の標準誤差を計算する方法をまず示し、その Hawkes 推定量および推定誤差をもとにして、直接的に Hawkes グラフ表現を得る方法と言える。

4.1 指数減衰型カーネル関数と最尤推定

2 節で示したように、本研究で用いられるデータは、各カテゴリ $j \in [m]$ について、 $t = 0$ 時点から数えて ℓ 回目の倒産発生時点 τ_ℓ^j とその時の同時発生件数 η_ℓ^j の組の集合 $(\boldsymbol{\tau}^j, \boldsymbol{\eta}^j) := \{(\tau_\ell^j, \eta_\ell^j)\}_{\ell=1, \dots, N_T^j}$ という形式で与えられることに注意する。

同時点での倒産発生件数 $\{\eta_k^j\}_{k=1, \dots, N_t^j}$ をマーク変数とするマーク付き (\mathcal{F}_t) -適度な純ジャンプ過程 L_t^j を $L_t^j := \sum_{k=1}^{N_t^j} \eta_k^j$ とすることで、カテゴリ j の実際の累積倒産発生件数が表される。カテゴリ j の倒産強度過程を λ_t^j と表すと、指数減衰型カーネル関数 $h_{i \rightarrow j}(u) = \xi^{i \rightarrow j} e^{-\kappa^j u}$ ($\xi^{i \rightarrow j} \geq 0, \kappa^j > 0$) を用いることで

$$\lambda_t^j = \mu^j + \sum_{i=1}^m \xi^{i \rightarrow j} \int_0^t e^{-\kappa^j(t-s)} dL_s^i. \quad (3)$$

と表される。

この場合、カテゴリごとに（ただし、全サンプルを用いて）強度過程に含まれるパラメータを最尤推定することができる。具体的には、カテゴリ j に対して、パラメータ集合を $\boldsymbol{\theta}^j := (\mu^j, \kappa^j, \{\xi^{i \rightarrow j}\}_{i \in [m]})$ とすると、対数尤度関数 $\log \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}^j \mid (\boldsymbol{\tau}^j, \boldsymbol{\eta}^j))$ の本質的な部分は、

$$\int_0^T \log(\lambda_{s-}^{j, \boldsymbol{\theta}^j}) dL_s^j - \int_0^T \lambda_s^{j, \boldsymbol{\theta}^j} ds$$

と表されることが知られている。より具体的には以下の目的関数を最大化するパラメータ集合 $\boldsymbol{\theta}^j$ の値を数値的に求めることになる。

$$\sum_{k=1}^{N_T^j} \log \left\{ \mu^j + \sum_{i=1}^m \xi^{i \rightarrow j} \sum_{\tau_\ell^i < \tau_k^j} \eta_\ell^i e^{-\kappa^j(\tau_k^j - \tau_\ell^i)} \right\} - \mu^j T - \frac{1}{\kappa^j} \sum_{i=1}^m \xi^{i \rightarrow j} \sum_{k=1}^{N_T^i} \eta_k^i (1 - e^{-\kappa^j(T - \tau_k^i)}) \quad (4)$$

なお、指数減衰型カーネル関数 $h_{i \rightarrow j}(u) = \xi^{i \rightarrow j} e^{-\kappa^j u}$ を仮定した場合、定義 2 で導入した Hawkes

グラフ表現に必要となる「辺の重み」は、 $\kappa^j > 0$ であるとき

$$a_{i,j} = \int_0^{\infty} \xi^{i \rightarrow j} e^{-\kappa^j t} dt = \frac{\xi_{i \rightarrow j}}{\kappa^j}$$

と表されることに注意する。

ただし、実際の指数減衰型カーネル関数の最尤推定に基づく Hawkes グラフ表現では、 $\xi^{i \rightarrow j}$ の最尤推定値が有意に正である有向線分 (i, j) を選択し、重みは対応する $a_{i,j}$ の値で与えることにする。

4.2 Embrechts-Kirchner の推定法

次に、Embrechts and Kirchner [3] で提唱されている、ノンパラメトリックなカーネル関数の推定をベースにした Hawkes グラフ表現の推定法についてまとめる。以後、この推定法を「Embrechts-Kirchner の推定法」と呼ぶことにする。

まず、Embrechts-Kirchner の推定法においては、Hawkes 推定量と名付けられる「(分析上指定した) 単位期間に対応する離散時点上のカーネル関数のノンパラメトリックな推定値」を成分にもつ行列、およびその標準誤差を与える行列を求めることが重要となる。そのためには、イベント発生時点データを指定した単位時間ごとの「イベント発生件数」のデータに変換する必要がある。

また、最終的に Hawkes グラフ表現を得る前に、やや弱い条件の下で「Hawkes スケルトン」という外生強度や辺の重みの情報をもたない有向グラフ表現を得て、それから「Hawkes スケルトン」の部分グラフとして Hawkes グラフを得るという 2 段階のステップで構成されることも Embrechts-Kirchner の推定法の特徴である。

これをふまえるとの Embrechts-Kirchner の推定法の手順は次のように 2 段階に要約できる。(1) 最初に大まかな単位時間に対してイベント発生件数データセットを作成し、それをもとに計算された Hawkes 推定量から計算される「辺の重み」の推定値が有意と見なされたものだけを「辺」として Hawkes スケルトン表現を得る (2) スケルトン表現を得たときよりも細かい単位期間に対するイベント発生件数データセットを作り直し、そのうえで Hawkes スケルトン表現に含まれる「辺」だけを対象にして、再度 (1) の手続きを繰り返して Hawkes 推定量を再計算する。再計算した結果においても「辺の重み」が有意と見なされた「辺」だけを残し「辺の重み」を付加したものを、Embrechts-Kirchner の推定法に基づく Hawkes グラフ表現を得る。

Hawkes 推定量

ここでは、まず Kirchner [7] および Embrechts and Kirchner [3] をもとに、Hawkes 推定量と名付けられた「(分析上指定した) 単位期間に対応する離散時点上のカーネル関数のノンパラメトリックな推定値」を成分にもつ行列の計算法を述べる。

Hawkes 推定量を用いる動機として、式 (1) のカーネル関数 $h_{i \rightarrow j}(u)$ に対して特定の関数形を与えず、 p -次のラグをもつ整数値 (ベクトル) 自己回帰モデル (INAR(p) モデルと表される) で近似できると仮定することで、線形代数計算のみで推定できるという利点があるという点が挙げられる。指数減衰型カーネル関数を用いるようなパラメトリックモデルに対する最尤法では数値的最適化が必要となることが多いが、特に高次元の場合には最適化計算の負荷が大きくなる。したがって、特定のカーネル関数を仮定すべき必然的な理由が無ければ、推定時の計算負荷を回避することができる点は手法的に大きな優位性と言える。

しかし一方であくまでも離散時点上で近似的にカーネル関数を推定する手法であるので、近似が精

度良く機能しているかどうかには注意を払う必要がある。本研究における倒産データを用いる実証分析の目的の一つは、同じデータに対する指数減衰型カーネル関数に対する最尤法とこれから述べる Embrechts-Kirchner の推定法のそれぞれから得られる Hawkes グラフ表現を比較することによって、仮に前者を真（に近い）モデルと見なしたときに、倒産リスクの自己励起性や相互励起性を後者がどの程度精度良く推定できているかを確認することである。

これ以降は Hawkes 推定量を求める方法について述べる。Kirchner [7] の内容を端的にまとめたものになっている。

まず、Hawkes 推定量を求めるためには、イベント発生時点のデータを変換する必要がある。

そのために（十分に小さい） $\Delta > 0$ を分析上定める単位期間として最初に固定する。 $k \in [n]$ （ただし $n := \lfloor T/\Delta \rfloor$ ）に対して、時間区間 $((k-1)\Delta, k\Delta]$ 内におけるタイプ j のイベント発生件数を $X_k^{(j,\Delta)}$ と表すことにする*10。

この $X_k^{(j,\Delta)}$ を成分にもつ m -次元ベクトルを $\mathbf{X}_k^{(\Delta)} = (X_k^{(1,\Delta)}, X_k^{(2,\Delta)}, \dots, X_k^{(m,\Delta)})^\top$ と定義する。このとき、 $\mathbf{X}_k^{(\Delta)}$ は、ある $p \in \mathbb{N}$ に対して直前の過去 p 期分の観測 $\mathbf{X}_{k-1}^{(\Delta)}, \dots, \mathbf{X}_{k-p}^{(\Delta)}$ を所与としたとき、

$$\mathbf{E} \left[X_k^{(j,\Delta)} \mid \mathbf{X}_{k-1}^{(\Delta)}, \dots, \mathbf{X}_{k-p}^{(\Delta)} \right] \approx \Delta \cdot \mu^j + \Delta \sum_{\ell=1}^p \sum_{i=1}^m h_{i \rightarrow j}(\ell\Delta) X_{k-\ell}^{(i,\Delta)} \quad (5)$$

と近似的に表すことができる（この近似の具体的な導出過程は付録 B 節にまとめている）。

この近似式によって、 $\mathbf{X}_k^{(\Delta)}$ を次のような整数値（ベクトル）自己回帰モデルに対応させることが考えられる。すなわち、ある固定された $p \in \mathbb{N}$ に対して、 m -次元ベクトル $\boldsymbol{\alpha}_0 := (\alpha_0^1, \dots, \alpha_0^m)^\top$ と行列 $(\alpha_\ell^{j,i})_{1 \leq j, i \leq m, \ell \in [p]} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m \times m}$ を推定すべきパラメータとする。 $\mathbf{X}_k^{(\Delta)}$ は、 p 次のラグをもつ次のような整数値自己回帰モデル（以後、INAR(p) モデル）を満たすとすると*11。

$$k \in \{p+1, \dots, n\} \quad \mathbf{X}_k^{(\Delta)} = \sum_{\ell=1}^p \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m X_{k-\ell}^{(i,\Delta)} \sum_{u=1}^m \xi_u^{(\alpha_\ell^{1,i})} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m X_{k-\ell}^{(i,\Delta)} \sum_{u=1}^m \xi_u^{(\alpha_\ell^{m,i})} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}_k.$$

ただし、 $\{\xi_u^{(\alpha_\ell^{j,i})}\}_{u=1,2,\dots}$ は、平均 $\alpha_\ell^{j,i}$ のポアソン分布 $Po(\alpha_\ell^{j,i})$ に従う i.i.d. の確率変数であり、 $\mathbf{X}_{k-1}^{(\Delta)}, \dots, \mathbf{X}_{k-p}^{(\Delta)}$ とは独立である。また、 $\boldsymbol{\varepsilon}_k = (\varepsilon_k^1, \dots, \varepsilon_k^m)^\top$ は m -次元確率変数の列ベクトルであり、 $j \in [m]$ に対して ε_k^j は他のすべての確率変数と独立であり、 $\varepsilon_k^j \sim Po(\alpha_0^j)$ であるとする。

*10 このように、ある区間内でのイベント発生件数をデータとして用いることになるので、倒産データのように複数のイベント発生時点が同時点に記録されている（実際は正確な時点を特定できない）場合でも、同時点データに対する特別な工夫をする必要がなくなるメリットはある。

*11 本稿の INAR(p) モデルの定式化は Kirchner [7] を参考にしている。ただし、原論文では reproduction operator (thinning operator などとも呼ばれる) というオペレーターを用いた簡潔な表現を採用しているが、ここではオペレーターを用いない表記で記述している。なお、INAR モデルについては、Fokianos [5] などで詳しく解説されている。また、基礎となる i.i.d. の確率変数列の分布も、今回は Hawkes モデルとの対応からポアソン分布を選択しているが、他の離散分布を仮定することも可能である。

この式の右辺の第 j 成分について条件付き期待値をとると、

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left[X_k^{(j,\Delta)} \mid \mathbf{X}_{k-1}^{(\Delta)}, \dots, \mathbf{X}_{k-p}^{(\Delta)} \right] &= \mathbf{E} \left[\sum_{\ell=1}^p \sum_{i=1}^m \sum_{u=1}^{X_{k-\ell}^{(i,\Delta)}} \xi_u^{(\alpha_\ell^{j,i})} + \varepsilon_k^j \mid \mathbf{X}_{k-1}^{(\Delta)}, \dots, \mathbf{X}_{k-p}^{(\Delta)} \right] \\
&= \sum_{\ell=1}^p \sum_{i=1}^m \mathbf{E} \left[\sum_{u=1}^{X_{k-\ell}^{(i,\Delta)}} \xi_u^{(\alpha_\ell^{j,i})} \mid \mathbf{X}_{k-1}^{(\Delta)}, \dots, \mathbf{X}_{k-p}^{(\Delta)} \right] + \mathbf{E}[\varepsilon_k^j] \\
&= \sum_{\ell=1}^p \sum_{i=1}^m \mathbf{E}[\xi_1^{(\alpha_\ell^{j,i})}] \mathbf{E}[X_{k-\ell}^{(i,\Delta)} \mid \mathbf{X}_{k-1}^{(\Delta)}, \dots, \mathbf{X}_{k-p}^{(\Delta)}] + \alpha_0^j \\
&= \sum_{\ell=1}^p \sum_{i=1}^m \alpha_\ell^{j,i} X_{k-\ell}^{(i,\Delta)} + \alpha_0^j.
\end{aligned}$$

ただし、2つ目の等号では Wald の等式を用いている。

この結果と (5) の近似式を比較することで、INAR(p) モデルのパラメータと、Hawkes 推定量の成分として得られる外生強度 μ^j およびカーネル関数 $h_{i \rightarrow j}(t)$ の間には、 $\alpha_0^j \approx \mu^j \Delta$ ($j \in [m]$) および $\alpha_\ell^{j,i} \approx h_{i \rightarrow j}(\ell \Delta) \Delta$ ($(i, j) \in [m]^2, \ell \in [p]$) という近似関係が成り立つことに注意する。

INAR(p) モデルのパラメータ α_0 および $(\alpha_\ell^{j,i})_{(i,j) \in [m]^2, \ell \in [p]}$ は「条件付き最小二乗法 (CLS)」によって推定することができる*12。要するに、離散時点グリッド上のカーネル関数の値に Δ をかけた $(\Delta h_{i \rightarrow j}(\Delta), \dots, \Delta h_{i \rightarrow j}(p \Delta))$ は、線形の重回帰式の回帰係数に対応したものであるので、グリッド上のカーネル関数の値を行列形式にまとめたものは、線形重回帰モデルにおける OLS 推定量が行列演算式で与えられることのアナロジーで次のような行列演算で与えられることが説明できる。

Kirchner [7] では、次で与えられる p -期間分の強度過程 (1) に関するノンパラメトリック推定量の行列 $\hat{\mathbf{H}}^{(\Delta,p)} := (\hat{\mathbf{H}}_1^\top \dots \hat{\mathbf{H}}_p^\top \hat{\boldsymbol{\mu}})^\top \in \mathbb{R}^{(mp+1) \times m}$ を「Hawkes 推定量」と定義している。ただし $k \in [p]$ に対して $\hat{\mathbf{H}}_k := (\hat{h}_{i \rightarrow j}(k \Delta))_{(i,j) \in [m]^2} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ とする。

先の議論から、Hawkes 推定量 $\hat{\mathbf{H}}^{(\Delta,p)}$ は次式の行列演算式で与えられることが分かる。

$$\hat{\mathbf{H}}^{(\Delta,p)} = \frac{1}{\Delta} (\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^\top \mathbf{Y}. \quad (6)$$

ただし、

$$\mathbf{Y} := (\mathbf{X}_{p+1}^{(\Delta)}, \mathbf{X}_{p+2}^{(\Delta)}, \dots, \mathbf{X}_n^{(\Delta)})^\top \in \mathbb{N}^{(n-p) \times m}, \quad (7)$$

$$\mathbf{Z} := \begin{pmatrix} (\mathbf{X}_p^{(\Delta)})^\top & (\mathbf{X}_{p-1}^{(\Delta)})^\top & \dots & (\mathbf{X}_1^{(\Delta)})^\top & 1 \\ (\mathbf{X}_{p+1}^{(\Delta)})^\top & (\mathbf{X}_p^{(\Delta)})^\top & \dots & (\mathbf{X}_2^{(\Delta)})^\top & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{X}_{n-1}^{(\Delta)})^\top & (\mathbf{X}_{n-2}^{(\Delta)})^\top & \dots & (\mathbf{X}_{n-p}^{(\Delta)})^\top & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^{(n-p) \times (mp+1)}. \quad (8)$$

この Hawkes 推定量は、Embrechts-Kirchner の推定法に対する強度過程の事後的なパスを描く際にも用いられる。

*12 これらのパラメータ推定には、最尤法や Yule-Walker(YW) 法によるモーメント法的な推定法も考えられる。Kirchner(2016) では、パラメータ数が多くなるとナイーブな最尤法は難しく、YW 型は単位根に近い場合には推定バイアスが大きくなる、といったことがコメントされている。

Embrechts-Kirchner の推定法における Hawkes グラフ表現

多次元 Hawkes 過程モデルを推定するという点では、カーネル関数および外生強度の推定値が得られているので、Hawkes 推定量を求めた時点で目的は果たされている。しかし、最終的に Hawkes グラフ表現という形でトータルでの自己励起性や相互励起性を視覚的に表現するためには、「辺の重み」が有意に正の値となるかどうかを判定する必要がある。

前述したように、Embrechts and Kirchner [3] では以下のような 2 段階の手続きを提案している。最初に、やや大まかな単位時間あたりのイベント発生件数データセットに対して Hawkes 推定量を求め、それから (2) 式で与えられる「辺の重み」 $a_{i,j}$ が有意に正の値となる辺（有向線分）だけを選択して「Hawkes スケルトン表現」を得る。次に、より細かい単位時間あたりのイベント発生件数データセットに作りかえて、Hawkes スケルトン表現に含まれる「辺」だけを対象に Hawkes 推定量を再計算し、それでもなお「辺の重み」が有意に正の値となる辺だけを選択して Hawkes グラフ表現を得る。

このような Hawkes スケルトン表現を経て Hawkes グラフ表現を得るという 2 段階の推定法は、イベントタイプ m の数が大きい場合を想定したものであり、本研究のように高々 $m = 4$ の場合しか扱わないときは、スケルトン表現の推定ステップを省略することも可能であると考えられる。しかし、2 段階での推定の実装はそれほど難しくなく、2 段階の推定法における単位期間の指定の違いによる推定結果の違いの検証も行う意義があると考えて 2 段階の推定法についてまとめておく。

ここでは、 m -次元 Hawkes 過程 \mathbf{N}_t に対する **Hawkes スケルトン表現**とは、頂点の集合が $\mathcal{V}_S = [m]$ 、辺の集合を「 $a_{i,j} > 0$ を満たす始点 i 、終点 j の有向線分 (i,j) 全体」すなわち $\mathcal{E}_S = \{(i,j) \in [m]^2 \mid a_{i,j} > 0\}$ で与えられる有向グラフ $\mathcal{G}_S := (\mathcal{V}_S, \mathcal{E}_S)$ として定義しておく。

以下では、Hawkes スケルトン表現を導出するにあたっての単位期間として $\Delta_{skel} > 0$ を固定し、 $\hat{\mathbf{H}}^{(\Delta_{skel}, p)}$ を Hawkes 推定量の式 (6) において、 $\Delta = \Delta_{skel}$ とおいたものとする。

Hawkes グラフ表現を得る際に最も重要なことは、最終的なグラフの「辺の重み」の推定量 $\hat{a}_{i,j}$ およびその標準誤差の 2 乗に相当する $\hat{\sigma}_{i,j}^2$ を求めることである。理論的には行列 $(\hat{a}_{i,j})_{(i,j) \in [m]^2}$ および $(\hat{\sigma}_{i,j}^2)_{(i,j) \in [m]^2}$ は、Hawkes 推定量 $\hat{\mathbf{H}}^{(\Delta_{skel}, p)}$ および Hawkes 推定量の分散共分散行列 \widehat{S}^2 を用いて、それぞれ

$$(\hat{a}_{i,j})_{(i,j) \in [m]^2} = \Delta_{skel} \mathbf{B} \hat{\mathbf{H}}^{(\Delta_{skel}, p)}, \quad (\hat{\sigma}_{i,j}^2)_{(i,j) \in [m]^2} = \Delta_{skel}^2 \mathbf{E}_{(i-1)m+j}^\top \widehat{S}^2 \mathbf{E}_{(i-1)m+j} \quad (9)$$

で与えられることが分かっている。ただし、 $\mathbf{B} := (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m)^\top$ とし、各 $j \in [m]$ に対して、 \mathbf{b}_j は $((k-1)m+j)$ -成分 ($k \in [p]$) だけ 1 で、残りは 0 となる $(mp+1)$ -次元ベクトル、 $\mathbf{E}_{(i-1)m+j}$ は $((k-1)m^2+(i-1)m+j)$ -成分 ($k \in [p]$) だけ 1 で、残りは 0 となる (m^2p+m) -次元ベクトル。

実際に推定された Hawkes スケルトン表現の辺集合を採用するかどうかは、「辺の重み」の推定値 $\hat{a}_{i,j}$ が 0 ではないということ、正規分布を前提とした $\alpha_{skel} \times 100\%$ の片側検定で $a_{i,j} = 0$ という帰無仮説が棄却できるかどうかで判定することになる。

すなわち、 $\widehat{\mathcal{E}}_S = \{(i,j) \in [m]^2 \mid \hat{a}_{i,j} > \hat{\sigma}_{i,j} z_{1-\alpha_{skel}}^{-1}\}$ として、信頼区間の水準を定めるチューニング・パラメータ α_{skel} に対応する Hawkes スケルトン表現の「辺」の集合を求めることとする。ただし、チューニング・パラメータ $\alpha_{skel} \in (0, 0.5)$ に対して、 $z_{1-\alpha_{skel}}^{-1}$ は標準正規分布の $(1 - \alpha_{skel}) \times 100\%$ 点分位点の値とする。

Embrechts and Kirchner [3] では、Hawkes スケルトン表現を求める際に最も負荷が高いのが Hawkes 推定量の分散共分散行列 \widehat{S}^2 の推定と説明されている。 \widehat{S}^2 の計算式を具体的に与えることもできるが、同論文では $(\hat{\sigma}_{i,j}^2)_{(i,j) \in [m]^2}$ を行列演算によって求めるアルゴリズムを示しており、実際に分析するため

にそのアルゴリズムを参考にするのが有用である（付録 C 節を参照のこと）。

さて、Hawkes スケルトン表現から最終的に Hawkes グラフ表現を得る際には、推定された Hawkes スケルトン表現 $\widehat{\mathcal{G}}_S = (\widehat{\mathcal{V}}_S, \widehat{\mathcal{E}}_S)$ に単に統計的有意となった「辺の重み」の情報を加えればよいというわけではない。実は Hawkes スケルトン表現を推定する段階ではイベントタイプ間の依存関係の判定を少し甘めにしておき、ある程度自己励起性や相互依存性が存在する辺を限定してから、より小さい単位時間 $\Delta_{graph} > 0$ に対するイベント発生件数データを作り直して Hawkes 推定量を再推定をして、最終的な Hawkes グラフ表現を得るという流れが Embrechts and Kirchner [3] の提唱するアルゴリズムである。

そのため、まず $j \in [m]$ に対して「親集合」 $PA(j) := \{i | (i, j) \in \mathcal{E}_S\}$ を定義し、要素数を $m_j := |PA(j)|$ とする。また、 $\Delta_{graph} > 0$ を $\Delta_{graph} \ll \Delta_{skel}$ となるようにとり固定する。したがって、以下では取り直した Δ_{graph} に対して再度 Hawkes 推定量を計算することになり、記号上は特に区別しないが、 n といった推定期間の分割数なども更新されたものになることに留意されたい。

その上で、推定された Hawkes グラフ表現 $\widehat{\mathcal{G}} = (\widehat{\mathcal{V}}, \widehat{\mathcal{E}})$ を $\widehat{\mathcal{V}} := \{(j; \hat{\mu}^j) | j \in [m]\}$ ($\hat{\mu}^j$ は外生強度) および

$$\widehat{\mathcal{E}} := \bigcup_{j \in [m]} \left\{ (i_\ell, j; \hat{a}_{i_\ell, j}) \mid \{i_1, i_2, \dots, i_{m_j}\} = \widehat{PA}(j), \hat{a}_{i_\ell, j} = \mathbf{b}_{\ell, j}^\top \widehat{\mathbf{H}}_j^{(\Delta_{graph}, p)} \right\}$$

として与えることにする。ただし、 $\mathbf{b}_{\ell, j}$ は $((k-1)m_j + \ell)$ -成分 ($k \in [p]$) だけ 1 で、残りは 0 となる $(m_j p + 1)$ -次元ベクトルである。

また、Hawkes グラフ表現を実際視覚化する際に付加する「辺の重み」は、信頼区間の水準を決めるチューニング・パラメータ $\alpha_{graph} \in (0, 0.5)$ に対して、実際には $\alpha_{skel} \times 100\%$ の片側検定を行っているが、Embrechts and Kirchner [3] に倣って、表示上は $(\hat{a}_{i_\ell, j} \pm \hat{\sigma}_{i_\ell, j} z_{1-\alpha_{graph}}^{-1})$ という両側信頼区間の形で、「頂点の重み」となる外生強度 μ^j に対する信頼区間も同様に、 $(\hat{\mu}^j \pm \hat{\sigma}_j z_{1-\alpha_{graph}}^{-1})$ という両側信頼区間の形で与えておく。

ここでも「標準誤差の 2 乗」 $\hat{\sigma}_{i_\ell, j}^2$ の計算がポイントとなる。くわえて Embrechts-Kirchner の推定法に基づく Hawkes グラフ表現においては、頂点の重みである外生強度 μ^j に対する「標準誤差の 2 乗」 $\hat{\sigma}_j^2$ も求める。

Embrechts-Kirchner の推定法による具体的な Hawkes グラフ表現のアルゴリズムは、付録 C 節にまとめられている。

4.3 Embrechts-Kirchner の推定法におけるチューニング・パラメータの決め方

前節で述べた Embrechts-Kirchner の推定法に基づいて Hawkes グラフ表現を得るためには、事前に決めなくてはならないチューニング・パラメータ $(p, \Delta_{skel}, \Delta_{graph}, \alpha_{skel}, \alpha_{graph})$ がある。

今回の分析におけるチューニング・パラメータの基本的設定は以下のように与える。ただし、分析において、チューニング・パラメータの違いによって推定される Hawkes グラフ表現がどのように変わるかについても簡単な比較分析も行う。

チューニング・パラメータのうち、倒産発生の余波の残る期間をコントロールする p について、Kirchner [7] では、適当な事前分析用の単位期間 $\Delta_0 > 0$ および最大のラグ p_0 をそれぞれ固定したうえで、次式で与えられる AIC の最小化を基準に決定する方法を提案している。

$$\text{AIC}^{\Delta_0}(p) := \log \left(\det \widehat{\Sigma}^{(\Delta_0)}(p) \right) + \frac{2pm^2}{n_0 - p}, \quad n_0 = \lfloor T/\Delta_0 \rfloor, \quad p \in \{1, \dots, p_0\},$$

ただし、 \mathbf{U}_k を Hawkes スケルトン表現の推定過程で得られる INAR(p) のホワイトノイズ項ベクトル

(付録 C 節を参照) として、 $\hat{\Sigma}^{(\Delta_0)}(p)$ は次で定義されるものとする：

$$\hat{\Sigma}^{(\Delta_0)}(p) := \frac{1}{n_0 - p} \sum_{k=p+1}^{n_0} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T.$$

AIC 最小化基準で p を決めるという視点では、上の式に現れる Δ_0 と p_0 がチューニング・パラメータと言える。Kirchner [7] の 4.1 小節においては、「経験的には、1 単位期間あたり平均で約 1 個のイベントが観測されるような Δ_0 を選ぶのが良い」と述べられている。しかし、一方で $p_0 \Delta_0$ が十分大きいことも期待されている。

今回の関東地区の倒産サンプルに対しては、特に明確な理由があるわけではないが、倒産イベントの伝播性が残留するのは長くても半年程度と考え $p_0 \Delta_0$ が 0.5 程度になると仮定したうえで、Hawkes スケルトン表現の推定時に与える単位期間である 3 週間を事前分析用の単位期間 Δ_0 としても採用することにする。

その結果、 $\Delta_0 = 21/375$ および $p_0 = 8$ を固定して、上記の式に基づいて AIC 最小化を行うことになり、業種カテゴリ別では $p = 4$ 、企業規模カテゴリ別では $p = 2$ が得られた。当然、この p が実際に適当かどうかは検証する必要がある。 Δ_0 および p_0 のパターンを変えることはせず、5.3 節では、直接 p の値を変えるたびに Embrechts-Kirchner の推定法を適用し、その結果得られる Hawkes グラフ表現を比較して、 p の大きさの違いによる推定結果への影響を確認することにする。

また、 $(\Delta_{skel}, \Delta_{graph})$ については、4.2 節で触れたように $\Delta_{graph} \ll \Delta_{skel}$ を満たすことは期待されている。あとは恣意的であるが、最終的な Hawkes グラフ表現を得る際の単位期間は 1 週間と定め、その前提となる Hawkes スケルトン表現を得る段階では、それよりある程度長いということで 3 週間は単位期間とすることにした。すなわち $\Delta_{skel} = 21/365$, $\Delta_{graph} = 7/365$ と設定する。

倒産報告件数が平日に比べて非常に少ない土曜日と日曜日も含むカレンダー通りの時間軸を用いていることや、平日の中でも比較的金曜日の報告件数が多くなっていることなどをふまえると、1 日単位で考えるよりは 1 週間という単位で考えることに、ある程度の合理性があると判断する^{*13}。

残る $(\alpha_{skel}, \alpha_{graph})$ については、論文 [3] の実験例を参考にして、いずれも 0.05 に設定した (片側検定の意味で 5% 有意水準を設定していることになる)。

5.3 節では、前述した p 以外のチューニング・パラメータに対しても、その設定方法の妥当性について別のパラメータ値を与えた際の結果を確認するという形で検証を行う。

5 分析結果

本節では、2 節に述べた 2003 年初～2015 年末の関東地区の倒産履歴データを業種カテゴリおよび企業規模カテゴリに分類したものをもとに、Hawkes 過程に基づく倒産強度モデルを 2 種類の特徴づけ (指数減衰型カーネル強度の最尤推定、および Embrechts-Kirchner の推定法) によって分析を行い、最終的にはいずれも Hawkes グラフ表現として視覚化し、倒産リスクの依存構造について比較・考察を行う。

まず、指数減衰型カーネル強度過程に対する最尤推定による各パラメータの推定結果および、それに基づく Hawkes グラフ表現を示す。次に、4.3 節のチューニング・パラメータに基づき全期間データを用いて Embrechts-Kirchner の推定法で得られた Hawkes グラフ表現を示す。

^{*13} 予備分析として、カレンダーベースの 1 日単位 $\Delta_{graph} = 1/365$ でも推定を行ったが、週単位 $\Delta_{graph} = 7/365$ での推定結果とほとんど同じであった。

表2 業種カテゴリ別の指数減衰型カーネル強度過程のパラメータ推定結果。製造関係を $j = 1$ 、インフラ・流通関係を $j = 2$ 、金融関係を $j = 3$ 、サービス関係を $j = 4$ 。カッコ内は Hesse 行列から得られる標準誤差。薄いグレーは片側検定 5% 有意、濃いグレーは片側検定 2.5% 有意

j	$\xi^{1 \rightarrow j}$	$\xi^{2 \rightarrow j}$	$\xi^{3 \rightarrow j}$	$\xi^{4 \rightarrow j}$	μ^j	κ^j
製造 (1)	1.62 (0.93)	1.67 (1.14)	1.96 (1.12)	0.00 (1.21)	15.88 (4.56)	8.07 (1.96)
イン・流通 (2)	1.65 (0.62)	0.00 (1.17)	0.07 (0.70)	0.09 (0.72)	17.97 (5.14)	3.35 (1.87)
金融 (3)	1.48 (0.66)	0.00 (0.93)	1.71 (0.82)	0.00 (0.80)	4.94 (3.10)	5.32 (1.82)
サービス (4)	0.00 (1.02)	2.00 (1.14)	0.00 (0.80)	0.48 (0.99)	13.98 (4.55)	8.67 (7.30)

さらに、チューニング・パラメータを変更した場合、および推定に用いるデータ期間を変更した場合に、推定される Hawkes グラフ表現がどの程度当初のグラフ表現と変わりうるかを調べる。実際に条件を変えた設定に対する推定結果もネットワーク・グラフで表して、当初の推定結果と比較するという単純な検証ではあるが、いくつかのケースを調べて考察を行う。

5.1 指数減衰型カーネル強度過程に対する最尤推定の結果

まず、指数減衰型カーネル強度過程 (3) に対する最尤法によるパラメータ推定結果は表 2, 3 である。なお、目的関数 (4) を最大化する際には、数値的最適化の初期値への依存性を考慮して、 $\xi^{i \rightarrow j}$ については $\{0, 0.3, 0.5\}$ を、 μ^j, κ^j については $\{1, 3, 5, 10\}$ を最適化の初期値の候補とし、計 12 通りの初期値の組合せについて、それぞれ (4) の最大化を行って、最終的に (4) を最大化したパラメータの組を最尤推定値とする*14。

表 2 から、業種カテゴリ別では、金融関係の自己励起性 ($\xi^{3 \rightarrow 3}$) や製造関係からインフラ・流通関係および金融関係への相互励起性 ($\xi^{1 \rightarrow 2}, \xi^{1 \rightarrow 3}$) が、片側検定 2.5% で有意に推定されている*15。また、片側検定 5% という有意水準に少し緩めると、製造関係の自己励起性 ($\xi^{1 \rightarrow 1}$) や、インフラ・流通関係からサービス関係、および金融関係から製造関係という相互励起性 ($\xi^{2 \rightarrow 4}, \xi^{3 \rightarrow 1}$) も許容される。さらに、外生強度に関しては金融関係 (μ^3) だけが片側検定 5% で有意になっていない。

この推定結果からは、例えば一つの解釈として「金融関係の倒産は製造関係の倒産の伝播によるのみ起因し、その後は両者の自己励起性および相互依存性によって製造関係と金融関係の両者において連鎖的な倒産の可能性も高まる」といった見方ができる。

一方で、企業規模カテゴリ別では、中企業および大企業の自己励起性 ($\xi^{2 \rightarrow 2}, \xi^{3 \rightarrow 3}$) および中企業から大企業への相互励起性 ($\xi^{2 \rightarrow 3}$) が 5% で有意に推定されている。有意水準を 10% と少し緩めると、小企業の自己励起性 ($\xi^{1 \rightarrow 1}$) や大企業から中企業への相互励起性 ($\xi^{3 \rightarrow 2}$) も許容される。この推定結果からは、例えば一つの解釈として「小企業と中・大企業間における倒産リスクの依存関係は無視できるが、中企業と大企業との間は双方向に比較強い依存関係が存在する」といった見方ができる。

上記の指数減衰型カーネル関数に対する最尤推定の結果をもとに得られる Hawkes グラフが図 2, 3 である。ただし、「辺の重み」 $\hat{a}_{i,j} = \hat{\xi}_{i\ell,j} / \hat{\kappa}^j$ については、分子の $\xi_{i\ell,j}$ が有意な辺だけを付記している。

*14 本稿においては、R の `optim` 関数を用いて目的関数 (4) の最大化問題を解いている。適当な値に収束させるためには、パラメータの初期値や探索範囲の設定にある程度試行錯誤が必要な場合も少なくない。また、標準誤差は、`optim` 関数からアウトプットされる Hesse 行列の逆行列の対角成分の平方根で与えている。

*15 有意水準としては 5% と 1% で比較するのが自然ではあるが、1% 片側検定だと有意として残る自己励起性・相互作用性が少なすぎることもあり、2.5% という有意水準を使用している。

表3 企業規模別カテゴリにした際の指数減衰型カーネル強度過程のパラメータ推定結果。小企業を $j = 1$ 、中企業を $j = 2$ 、大企業を $j = 3$ とする。カッコ内は Hesse 行列から得られる標準誤差。薄いグレーは片側検定 5% 有意、濃いグレーは片側検定 2.5% 有意

j	$\xi^{1 \rightarrow j}$	$\xi^{2 \rightarrow j}$	$\xi^{3 \rightarrow j}$	μ^j	κ^j
小企業 (1)	1.18 (0.71)	0.32 (0.63)	1.33 (0.84)	28.64 (5.97)	6.12 (2.09)
中企業 (2)	0.00 (0.69)	2.00 (0.83)	1.40 (0.82)	21.04 (5.83)	5.47 (1.59)
大企業 (3)	0.00 (0.79)	1.66 (0.64)	1.87 (0.94)	7.89 (4.44)	6.95 (2.43)

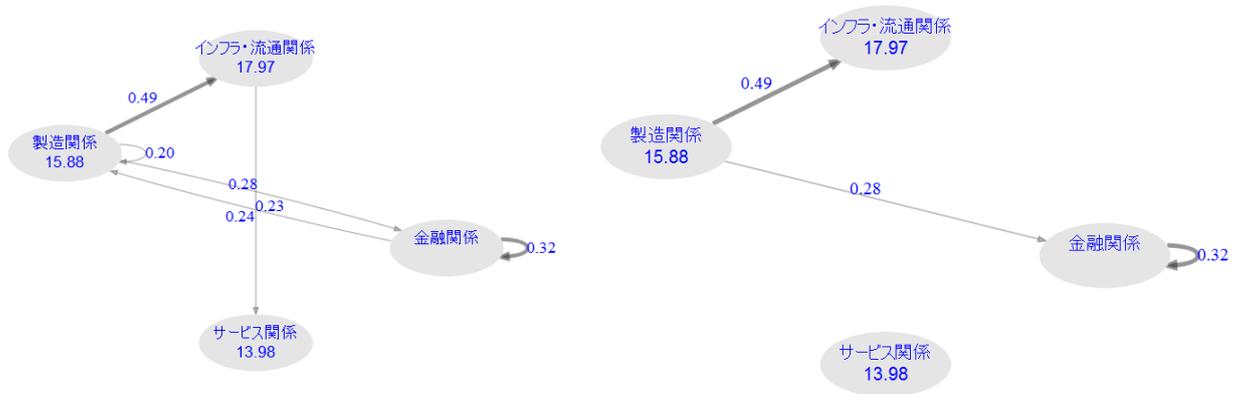


図2 業種カテゴリ別に関して指数減衰型カーネルの結果をグラフ表示したもの。 $\hat{\xi}_{i\ell,j}$ および $\hat{\mu}^j$ の推定値が有意な辺と外生強度だけを表示。左は片側検定 5% 有意、右は片側検定 2.5% 有意のもの。辺の矢印に付随する数値は $\hat{\xi}_{i\ell,j}/\hat{\kappa}^j$ である。各カテゴリの楕円内の数値は外生強度の推定値 $\hat{\mu}^j$ の推定値。

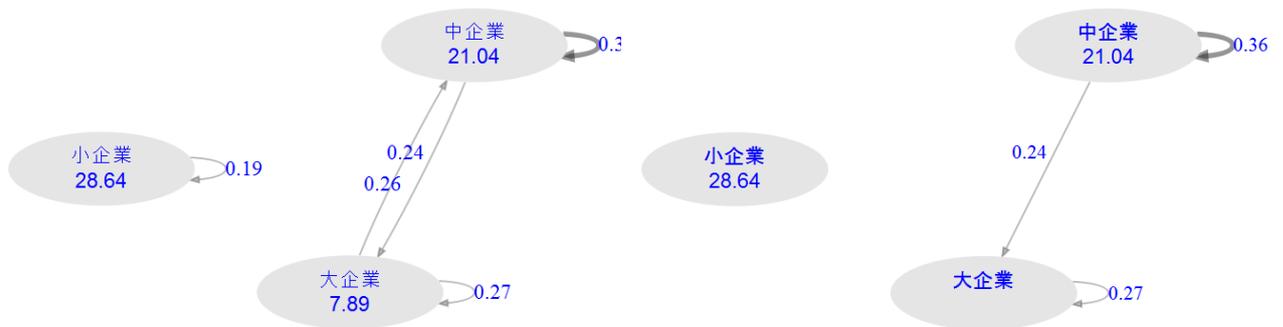


図3 企業規模カテゴリ別に関して指数減衰型カーネルの結果をグラフ表示したもの。 $\hat{\xi}_{i\ell,j}$ および $\hat{\mu}^j$ の推定値が有意な辺と外生強度だけを表示。左は片側検定 5% 有意、右は片側検定 2.5% 有意のもの。辺の矢印に付随する数値は $\hat{\xi}_{i\ell,j}/\hat{\kappa}^j$ である。各カテゴリの楕円内の数値は外生強度の推定値 $\hat{\mu}^j$ の推定値。

5.2 Embrechts-Kirchner の推定法の結果

次に、Embrechts-Kirchner の推定法で得られた Hawkes グラフ表現を示す。4.3 節で触れたように、分析における基本的設定としてのチューニング・パラメータは、 p については業種カテゴリでは

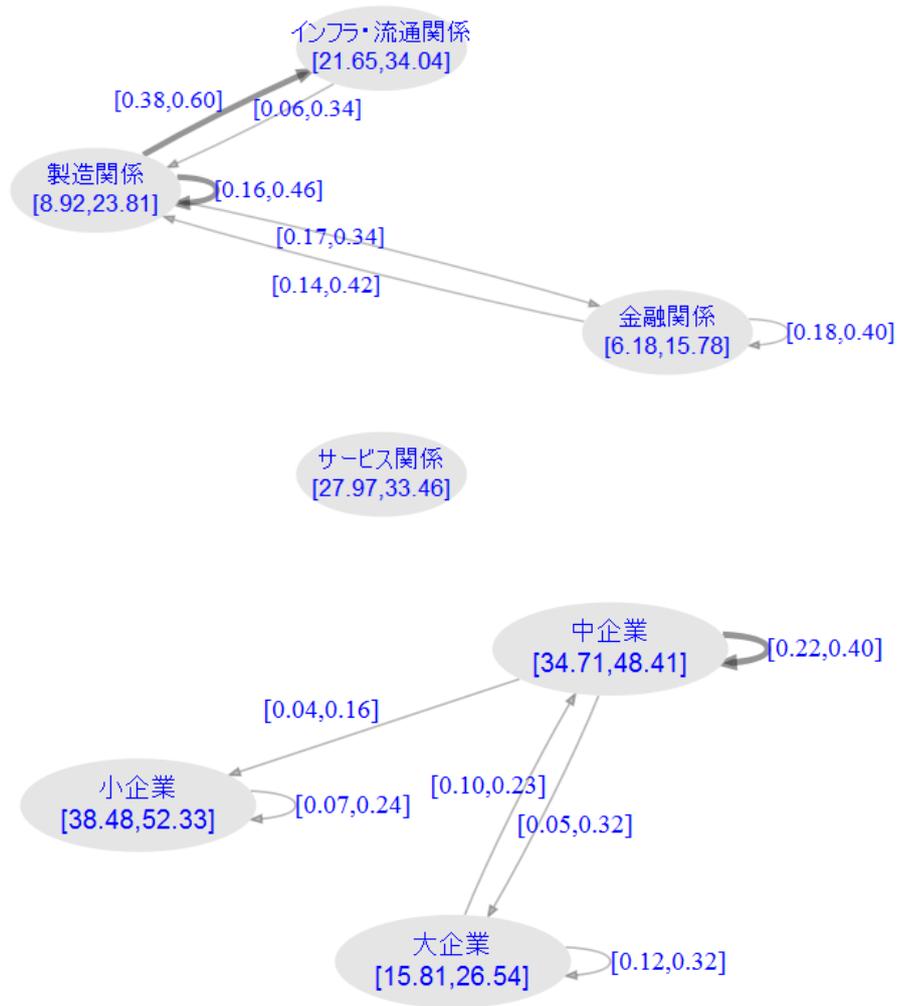


図4 上：業種カテゴリ別に関して Embrechts-Kirchner の推定法で得られた Hawkes グラフ表現 ($p = 4, \Delta_{skel} = 21/365, \Delta_{graph} = 7/365, \alpha_{skel} = \alpha_{graph} = 0.05$)。下：規模カテゴリ別に関して推定された Hawkes グラフ表現 ($p = 2$ で後は業種カテゴリ別と同じ)。矢印に付随する区間は $\hat{a}_{i_\ell, j}$ の 90% 信頼区間。各カテゴリの楕円内の区間は「頂点の重み」に当たる外生強度 μ^j の信頼区間。

$p = 4$ 、企業規模カテゴリ別では $p = 2$ とする。それ以外は、共通して $(\Delta_{skel}, \Delta_{graph}, \alpha_{skel}, \alpha_{graph}) = (21/365, 7/365, 0.05, 0.05)$ を選択する。

これを受けて、4.2~3.3 節で述べた方法で推定された Hawkes グラフ表現を図 4 に示している*16。矢印に付随する区間は 3.3 節で言及したように、Embrechts and Kirchner [3] のグラフ表現の例で与えられているのと同様に、「辺の重み」の推定値 $\hat{a}_{i_\ell, j}$ の ($\alpha_{graph} = 0.05$ に対する) 90% 両側信頼区間の形で与えている (実際には有意水準 5% の片側検定として意味をもつ)。

なお、今回の Embrechts-Kirchner の推定法においては Hawkes スケルトン表現の段階で選ばれた「辺」は全て最終的な Hawkes グラフ表現にも選ばれており、スケルトン表現の推定を省いても推定には影響がなかった可能性もある。ただし、一般にスケルトンとグラフという 2 段階の推定が必要ないかどうかについては別途検証の必要があると考える。

*16 Hawkes グラフ表現の描画に際しては、「辺の重み」 $\hat{a}_{i_\ell, j}$ の推定値の水準を「0 以上 0.3 未満」「0.3 以上 0.5 未満」「0.5 以上」の 3 段階に分けて、矢印の太さを水準の大きさに応じて変えている。

業種カテゴリ別の結果（図 4 左）では、指数減衰型カーネル強度の最尤推定の結果と同様に、サービス関係の自己励起性が認められる一方で、指数減衰型カーネル強度モデルではほとんど認められない「サービス関係以外の自己励起性」や「金融関係から製造関係およびインフラ・流通関係への相互励起性」が Hawkes グラフ表現では認められるなど、両者の推定結果が示唆する依存関係は異なっている。

一方の企業規模カテゴリ別の結果（図 4 右）においては、最尤推定で認められた自己励起性に加え、「大企業の自己励起性」が認められる。

そのため、システミック・リスクが大きいと考えられる「金融関係」や「大企業」の影響が捕捉できている点で、Embrechts-Kirchner の推定法で得られた Hawkes グラフ表現の方がより直感に近い。

次に、指数減衰型カーネル強度の最尤推定の結果と、Embrechts-Kirchner の推定法の結果の乖離度合いを別の観点から見るために、それぞれの推定結果に整合的な強度の事後パスを描いて比較する。

指数減衰型カーネル強度モデルに関しては、以下のようにパラメータ推定値と倒産発生時点のデータを組み合わせることで、 λ_{ℓ}^j の事後強度パスを描くことができる：

$$\hat{\lambda}_{k\Delta_{graph}}^j = \hat{\mu}^j + \sum_{i=1}^m \hat{\xi}^{i \rightarrow j} \sum_{\tau_{\ell}^i < k\Delta_{graph}} \eta_{\ell}^i e^{-\hat{\kappa}^j (k\Delta_{graph} - \tau_{\ell}^i)}.$$

一方で、Embrechts-Kirchner の推定法では、 Δ_{graph} 時点ごとの強度過程の推定値を、Hawkes 推定量と実際の時間区間ごとの観測件数データを用いて計算する。具体的には、 $k = p + 1, \dots, n$ に対して

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{k\Delta_{graph}}^j &\approx \frac{1}{\Delta_{graph}} \mathbf{E} \left[X_k^{(j, \Delta_{graph})} \mid \{ \mathbf{X}_{\ell}^{(\Delta_{graph})} \}_{\ell=k-1, \dots, k-p} \right] \\ &= \left(\mathbf{Z}_j \hat{\mathbf{H}}_j^{(\Delta_{graph}, p)} \right) \text{ の第 } (k-p) \text{ 成分.} \end{aligned}$$

とする。ただし、 $k\Delta_{graph}$ と表示される時点以外の Embrechts-Kirchner の推定法による強度の値は、 \mathbf{R} の spline 関数を用いてスプライン補間している。

図 5 が、業種カテゴリ別および企業規模カテゴリ別の、指数減衰型カーネル強度モデルと Embrechts-Kirchner の推定法による強度の事後パスの推移を比較したものである。

いずれのカテゴリにおいても両者の推移は、振幅の程度に差がある時期もあるが、強度の水準としてはほぼ同程度に推移していると思わせることが確認できる。

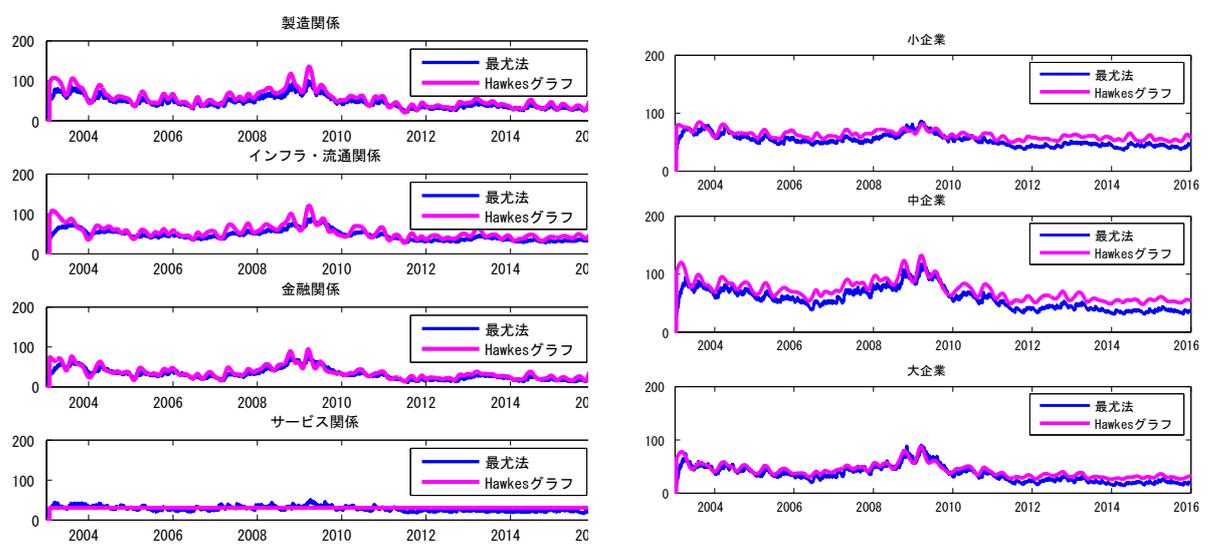


図5 業種カテゴリ別(左)と企業規模カテゴリ別(右)それぞれで、「指数減衰型カーネル+最尤法」と Embrechts-Kirchner の推定法それぞれの推定結果をもとに得られる事後的な倒産発生強度 λ_t^j のパス。横軸は2003年1月1日を起点に表示。Embrechts-Kirchner の推定法の結果は、Hawkes推定量の結果をスプライン補間して表示している。

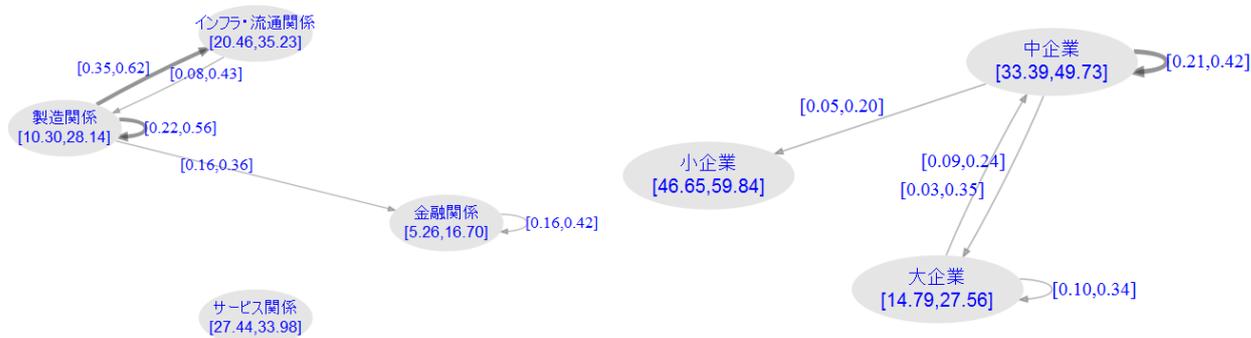


図6 $\alpha_{skel} = \alpha_{graph} = 0.025$ として Embrechts-Kirchner の推定法で得られた Hawkes グラフ表現 (その他のパラメータは最初の分析と同じ)。矢印に付随する区間は $\hat{a}_{i_\ell, j}$ の 95% 信頼区間。左は業種別カテゴリ ($p = 4$)、右は企業規模別カテゴリ ($p = 2$)。

5.3 チューニング・パラメータの変化に対する推定結果への影響

チューニング・パラメータが変わると、Hawkes グラフ表現はどのくらい変わるか、というロバスト性を調査するために、以下のようにパラメータごとに基本的設定とは異なるパラメータ値を設定したうえで、Hawkes グラフ表現を再導出する。

以下のような変更パターンを試行し、推定結果を見る。

- $\alpha_{skel}, \alpha_{graph}$: 0.05 (当初の値) \rightarrow 0.025
- p : 2~10 を総当たりで試す (当初の値は、業種別が 4、企業規模別が 2)
- Δ_{skel} : 21/365 (当初の値) \rightarrow 28/365, 35/365

まず、 $\alpha_{skel}, \alpha_{graph}$ の違いに関しては、図 6 を参照のこと。業種カテゴリ別でも企業規模カテゴリ別でも、AIC 最小化で得た p に対しては、 α_{skel} および α_{graph} を 0.05(片側検定としては 5%) から 0.025(片側検定としては 2.5%) としたことで、それぞれグラフの辺が 1 本ずつ消えたが、推定結果に大きな変化が生じたとはまでは言えない*17。

次に、倒産発生の伝播の残存期間をコントロールする p の違いに関して、業種カテゴリ別の結果は図 7 を、企業規模カテゴリ別の結果は図 8 をそれぞれ参照のこと。業種カテゴリ別では、 $p = 3$ および $p = 5$ のときは、AIC 最小化で得られた $p = 4$ と同様のグラフが推定された。 $p = 2$ のときの推定結果は、指数減衰型カーネルの 10% 有意な推定値に基づいて描いたグラフ (図 2 の左図) と同様になった。また、 $p \geq 6$ のときは「製造業」からの作用についての結果が特に不安定となる傾向が見られた。

企業規模カテゴリ別では、 $p = 3, 4, 5$ のときは、AIC 最小化 $p = 2$ と同様のグラフが推定された。 $p \geq 6$ のときは「小企業 \rightarrow 中企業」という相互励起性が棄却された以外は同様のグラフが推定された (ただし $p \geq 8$ では「大企業の外生強度」が棄却された)。

最後に、 Δ_{skel} の違いに関して、業種カテゴリ別の結果を図 9 に示す。 $\Delta_{skel} = 28/365, 35/365$ においては、辺の重みは若干違うところもあるが、伝播構造のグラフの形状は同じ推定結果である。しかし、これらは図 4 の右で示される $\Delta_{skel} = 21/365$ の場合の推定結果と比較的大きく異なっていることに注意が必要である。一方、企業規模カテゴリ別では $\Delta_{skel} = 28/365, 35/365$ としても $\Delta_{skel} = 21/365$

*17 $\alpha_{skel} = 0.05$ および $\alpha_{graph} = 0.025$ という組み合わせも試したが、ほとんど $\alpha_{skel} = \alpha_{graph} = 0.05$ の場合とほぼ同じ結果であった。

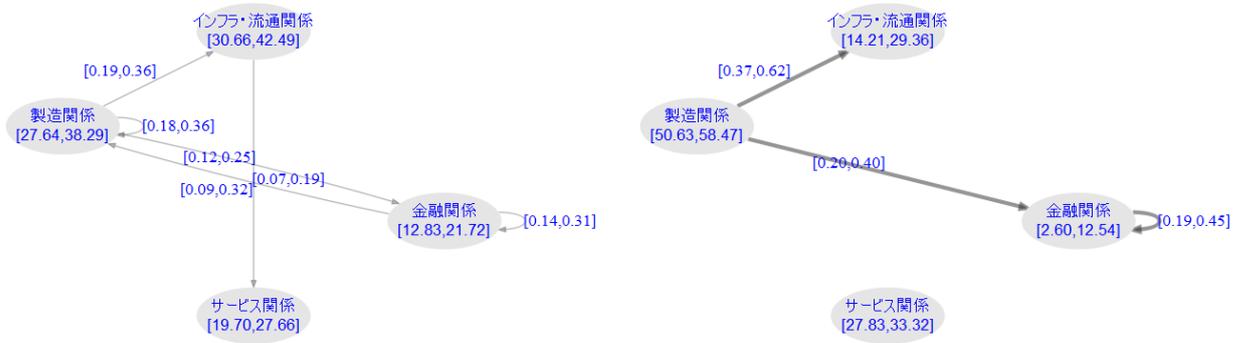


図7 p を変えて業種別カテゴリに対して Embrechts-Kirchner の推定法で得られた Hawkes グラフ表現 (その他のパラメータは最初の分析と同じ)。左は $p = 2$ 、右は $p = 6$ の場合

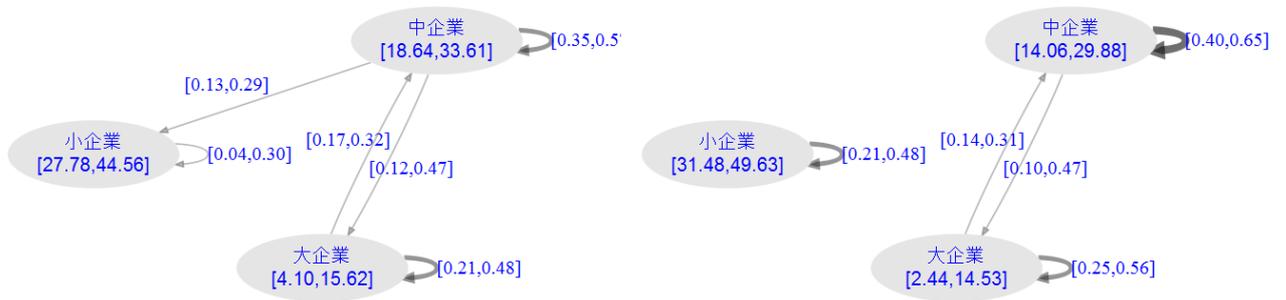


図8 p を変えて企業規模別カテゴリに対して Embrechts-Kirchner の推定法で得られた Hawkes グラフ表現 (その他のパラメータは最初の分析と同じ)。左は $p = 4$ 、右は $p = 6$ の場合

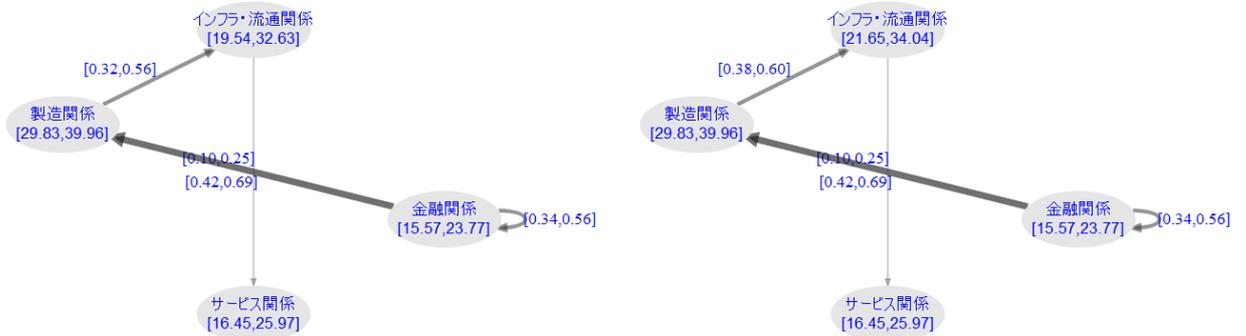


図9 Δ_{skel} を変えて業種別カテゴリに対して Embrechts-Kirchner の推定法で得られた Hawkes グラフ表現 (その他のパラメータは最初の分析と同じ)。左は $\Delta_{skel} = 28/365$ 、右は $\Delta_{skel} = 35/365$ の場合

と全く同じ Hawkes グラフ表現が得られた。

5.4 推定期間の違いによる推定結果への影響

次に、推定に用いるデータの利用期間を変えた場合に Embrechts-Kirchner の推定法で得られる Hawkes グラフ表現がどのように変わるかを見ていく。

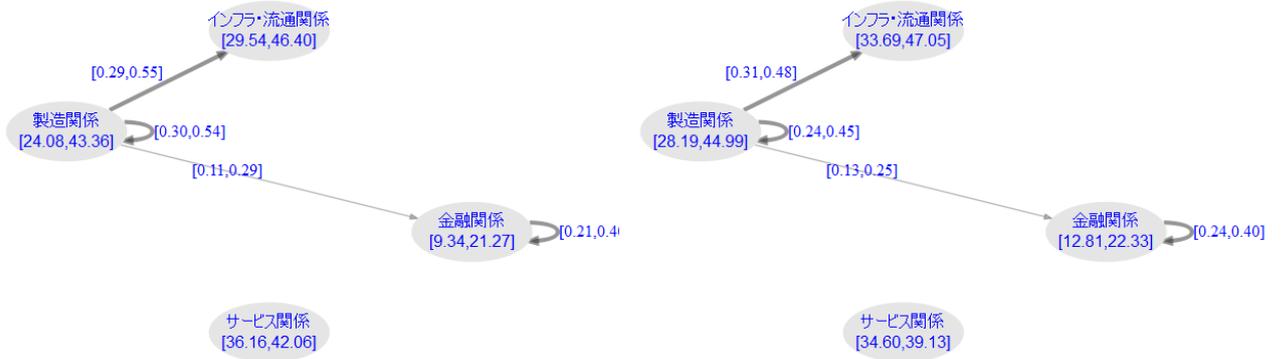
具体的には、業種カテゴリ別、企業規模カテゴリ別それぞれについて (1) 2003 年初～2007 年末 (2) 2003 年初～2010 年末 (3) 2008 年初～2015 年末 (4) 2011 年初～2015 年末 の 4 つの期間のデータを用いて Embrechts-Kirchner の推定法を適用する (チューニング・パラメータは 4.3 節で設定した当初のものとする)。

なお、2008 年から 2010 年にかけては、リーマン・ブラザーズ、日本航空、日本振興銀行、武富士などの大型の倒産が比較的多い時期ということになる (図 1 の中企業と大企業の倒産件数もこの時期にクラスタリングしているように見える)。

推定結果は、業種カテゴリ別については図 10 に、企業規模カテゴリ別については図 11 にそれぞれ示す。いずれの場合も、(3) 2008 年初～2015 年末に対して推定された Hawkes グラフ表現が最も多くの依存関係を示唆し、特に「金融関係から製造関係」および「大企業から中企業」への相互励起性が比較的強く表れている。一方で、(4) 2011 年初～2015 年末に対しては、業種カテゴリ別では製造関係から金融関係への弱い相互励起性が一つだけ得られ、企業規模カテゴリ別では自己励起性も相互励起性も得られていない。

特に 2008 年～2010 年の時期を含む期間について、自己励起性・相互励起性が比較的多く示唆されていることに注意する必要があると考える。この期間は、背景となるマクロ経済が低調だったために比較的大きな企業の倒産件数が多く、そのことが多くの自己励起性・相互励起性という形で表出しただけという可能性も大いに考えられる。それゆえ、3.1 節でも議論したように、マクロ経済変数を取り込んだ倒産発生強度モデルを用いた分析を行い、マクロ経済の影響を除いた後でも残る倒産リスクの伝播構造を把握するということが必要になってくると考える。

なお、推定期間の違いによる Embrechts-Kirchner の推定法の結果の違いについて 付録 D 節に調査してまとめておく。



推定期間：2003年1月1日～2007年12月31日 推定期間：2003年1月1日～2010年12月31日

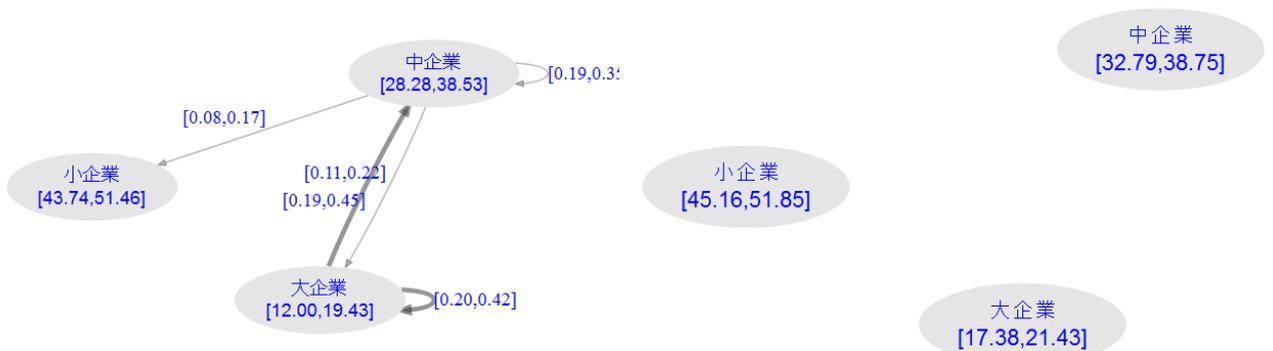


推定期間：2008年1月1日～2015年12月31日 推定期間：2011年1月1日～2015年12月31日

図 10 業種別カテゴリに対して推定された Embrechts-Kirchner の推定法で得られた Hawkes グラフ表現。推定に用いたデータ期間は（左上）2003年1月1日～2007年12月31日、（右上）2003年1月1日～2010年12月31日、（左下）2008年1月1日～2015年12月31日（右下）2011年1月1日～2015年12月31日



推定期間：2003年1月1日～2007年12月31日 推定期間：2003年1月1日～2010年12月31日



推定期間：2008年1月1日～2015年12月31日 推定期間：2011年1月1日～2015年12月31日

図 11 企業規模別カテゴリに対して推定された Embrechts-Kirchner の推定法で得られた Hawkes グラフ表現。推定に用いたデータ期間は (左上) 2003 年 1 月 1 日～2007 年 12 月 31 日、(右上) 2003 年 1 月 1 日～2010 年 12 月 31 日、(左下) 2008 年 1 月 1 日～2015 年 12 月 31 日 (右下) 2011 年 1 月 1 日～2015 年 12 月 31 日

6 まとめ

本研究では、特に関東地区企業の比較的長期の倒産履歴データを対象に、業種および企業規模に基づいて複数カテゴリに区分して、倒産リスクの依存関係を Hawkes 過程で分析した。特に、Embrechts and Kirchner [3] で提案された多次元 Hawkes 過程のカーネル関数のノンパラメトリックな推定法を試みて、従来から用いられてきた指数減衰型カーネル関数で特徴付けられる強度モデルを最尤推定した結果との比較・考察することを通じて、多次元 Hawkes 過程による倒産リスク依存関係のモデル化およびその推定法としての Embrechts-Kirchner の推定法の応用可能性を検討した。

まず、倒産リスクの伝播構造を示す Hawkes グラフ表現に関して、Embrechts-Kirchner の推定法による結果は指数減衰型カーネル関数強度に対する最尤法による結果と大きな違いはない。この結果は、Embrechts-Kirchner の推定法が、これまで多数応用されてきた指数減衰型カーネル関数で特徴付けした強度過程を最尤推定する手法に代替する推定法として十分に応用可能性があることを示唆していると考えられる。

ただし、Embrechts-Kirchner の推定法の方が、若干多めの依存関係の存在を示唆する傾向が見られた。この結果は、あくまでも今回のデータセットからの傾向の可能性であることに留意すべきであるが、企業規模カテゴリ別では、指数減衰型カーネル関数強度モデルが示唆する依存関係は、Embrechts-Kirchner の推定法で示唆される依存関係の中に含まれていた。その一方で、業種カテゴリ別では、指数減衰型カーネル関数強度モデルが示唆した一部の依存関係が、Embrechts-Kirchner の推定法では現れなかった。推定法の違いによって、示唆される依存関係の微妙な違いが発生する要因については、より注意深く検討する余地がある。

また、事後強度パスに関しては、いずれのカテゴリで見ても、観測された期間全体で、両モデルは比較的似た水準で推移していた。

くりかえしの注意になるが、これらはあくまでも限定されたデータセットに対する分析結果からの考察であることに注意すべきである。しかし、チューニング・パラメータをどのように決定するかという実務的課題はあるものの、扱うカテゴリ数が多くなれば、数値的な最適化における初期値の設定などが面倒になる指数減衰型カーネル関数強度モデルの最尤推定という従来からの手法よりも、Embrechts-Kirchner の推定法の方が計算負荷という点でも十分に応用可能性があると考えられる。

もちろん、多次元 Hawkes 過程モデルに基づく倒産リスク依存関係の推定法として、Embrechts-Kirchner の推定法の応用可能性をより説得的に主張するためには、他の期間や地域のデータセットに対する結果を考察したり、別の切り口によるカテゴリ分けに対する推定結果なども十分吟味していく必要がある。くわえて、3.1 節の後半に論じたように、倒産リスクに対する強度モデルとしての有効性を主張するためには、Azizpour et al. [1] などで示唆されている結果をふまえて、倒産発生の強度モデルをマクロ経済変数などの共変量によっても説明可能なように拡張することが不可欠であると考えられる。

そのためには、(1) で与えられた Hawkes 過程をマクロ経済変数などを含むように拡張した強度モデルに対しても、Embrechts-Kirchner の推定法が適用できるように改良する必要がある。これらの事項については今後の課題としたい。

参考文献

- [1] S. Azizpour, K. Giesecke, G. Schwenkler (2016), “Exploring the Sources of Default Clustering”, *Working paper*, <http://people.bu.edu/gas/papers/exploring.pdf> (accessed on April, 26, 2017). (To appear in *Journal of Financial Economics*.)
- [2] E. Bacry, I. Mastromatteo and J.-F. Muzy (2015), “Hawkes processes in finance”, *Working paper*, arXiv:1502.04592.
- [3] P. Embrechts and M. Kirchner (2018), “Hawkes graphs”, *Theory of Probability & Its Applications*, 62(1), 163–193.
- [4] E. Errais, K. Giesecke and L. R. Goldberg (2010), “Pricing credit from the top down with affine point processes”, *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 1, 642–665.
- [5] K. Fokianos (2012), “Count time series models”, *Time series Analysis: Methods and applications, Handbook of Statistics 30* (edited by T.S. Rao, S. S. Rao, and C.R. Rao. Elsevier, Amsterdam), 315–347.
- [6] A.G. Hawkes (1971), “Spectra of self-exciting and mutually exciting point processes”, *Biometrika*, 58, 83–90.
- [7] M. Kirchner (2017), “An estimation procedure for the Hawkes process”, *Quantitative Finance*, 17(4), 571–595.
- [8] Y. Ogata (1981), “On Lewis’ simulation method for point processes”, *IEEE Transactions on Information Theory*, 27(1), 23–31.
- [9] Y. Ogata (1988), “Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes”, *Journal of American Statistical Association*, 83(401), 9–27.
- [10] S. Yamanaka, M. Sugihara and H. Nakagawa (2012), “Modeling of contagious credit events and risk analysis of credit portfolios,” *Asia-Pacific Financial Markets*, 19(1), 43–62.
- [11] 中川 秀敏 (2010), 「相互作用型の格付変更強度モデルによる格付変更履歴データの分析」, 日本応用数学会論文誌, 20(3), 183–202.

付録 A 対象データ内の負債総額トップ 20

2 節で説明した (株) 東京商工リサーチの倒産履歴データ (2003 年～2015 年) の中で、分析対象とした企業所在都道府県が関東地区の倒産企業のうち負債総額が上位 20 の企業一覧を表 4 にまとめた。

表 4 (株) 東京商工リサーチの倒産履歴において、企業所在都道府県が関東地区の倒産企業のうち負債総額が上位 20 の企業一覧 (代表者が同一の複数の企業が同じ日に倒産していた場合は負債総額が最も大きい企業に含めた。この中では、(株) 日本航空インターナショナル (2)、松栄不動産 (株)、東京臨海副都心建設 (株)、大洋緑化 (株)、麴町土地建物 (株) がこのケースに該当する)。

倒産発生日	漢字商号	所在地	負債総額		
			(百万円)	倒産形態	業種カテゴリ
20080916	リーマン・ブラザーズ証券 (株)	東京都	3,431,400	民事再生法	金融関係
20100119	(株) 日本航空インターナショナル	東京都	2,199,497	会社更生法	インフラ・流通関係
20100910	日本振興銀行 (株)	東京都	680,563	民事再生法	金融関係
20070625	麻布建物 (株)	東京都	564,800	会社更生法	金融関係
20120227	エルピーダメモリ (株)	東京都	448,033	会社更生法	製造関係
20100928	(株) 武富士	東京都	433,608	会社更生法	金融関係
20051115	(株) エー・シー・リアルエステート	東京都	352,676	民事再生法	金融関係
20090223	(株) S F C G	東京都	338,040	民事再生法	金融関係
20030217	(株) エスティティコーポレーション	東京都	313,100	民事再生法	サービス関係
20030319	ジャパン石油開発 (株)	東京都	307,600	民事再生法	製造関係
20081010	大和生命保険 (株)	東京都	269,500	会社更生法	金融関係
20030106	松栄不動産 (株)	埼玉県	265,300	破産	金融関係
20060512	東京臨海副都心建設 (株)	東京都	261,000	民事再生法	金融関係
20040210	大洋緑化 (株)	東京都	253,722	会社更生法	サービス関係
20031113	麴町土地建物 (株)	東京都	237,000	破産	金融関係
20070111	(株) エフ・アール・イー	東京都	228,500	破産	金融関係
20030430	(株) アール・エス・ティー	東京都	212,400	破産	金融関係
20100218	(株) ウィルコム	東京都	206,000	会社更生法	インフラ・流通関係
20090205	日本総合地所 (株)	東京都	197,549	会社更生法	金融関係
20080404	ケイアール不動産 (株)	東京都	167,763	特別清算	金融関係

付録 B Hawkes 推定量の INAR モデルによる近似のアイデア

ここでは、4.2 節で説明している「(小さい) 時間区間におけるイベント発生件数」の時系列データに基づいて得られる Hawkes 推定量 (6) によって、時間軸のグリッド上での強度の推定値 $\lambda_{k\Delta}^j$ が近似的に得られるアイデアのもとになる、整数値確率変数 $X_k^{(j,\Delta)}$ の過去の観測に関する条件付き期待値が満たす近似式 (5) の導出について、Kirchner [7] の議論を参考にしてまとめておく。

なお、あくまでもアイデアに言及する目的であるので、3 節、および 4.2 節の設定以上には、数学的設定を厳密に与えずに論じることをお断りしておく。

まず、計数過程の一般的な性質として $N_t^j - \int_0^t \lambda_s^j ds$ はマルチンゲールになることから、

$$X_k^{(j,\Delta)} := N_{k\Delta}^j - N_{(k-1)\Delta}^j = \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} \lambda_s^j ds + \text{あるマルチンゲールの時間差}$$

と表すことができる。ここで、過去の履歴 $\mathbf{X}_{k-1}^{(\Delta)}, \mathbf{X}_{k-2}^{(\Delta)}, \dots$ に関する条件付き期待値をとると、以下が成り立つことになる：

$$\mathbf{E} \left[X_k^{(j, \Delta)} \mid \mathbf{X}_{k-1}^{(\Delta)}, \mathbf{X}_{k-2}^{(\Delta)}, \dots \right] = \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} \mathbf{E} \left[\lambda_t^j \mid \mathbf{X}_{k-1}^{(\Delta)}, \mathbf{X}_{k-2}^{(\Delta)}, \dots \right] dt.$$

ここで、強度過程 λ_t^j が (1) 式で与えられているとすると、(十分小さい) $\Delta > 0$ および、全ての $i \in [m]$ に対して $\int_{p\Delta}^{\infty} h_{i \rightarrow j}(u) du$ が十分小さくなるような $p \in \mathbb{N}$ に対しては、以下のような近似の議論が可能となる*18。

$k = p + 1, \dots, n$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[X_k^{(j, \Delta)} \mid \mathbf{X}_{k-1}^{(\Delta)}, \mathbf{X}_{k-2}^{(\Delta)}, \dots \right] &= \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} \mathbf{E} \left[\lambda_t^j \mid \mathbf{X}_{k-1}^{(\Delta)}, \mathbf{X}_{k-2}^{(\Delta)}, \dots \right] dt \\ &= \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} \mathbf{E} \left[\mu^j + \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^t h_{i \rightarrow j}(t-s) dN_s^i \mid \mathbf{X}_{k-1}^{(\Delta)}, \mathbf{X}_{k-2}^{(\Delta)}, \dots \right] dt \\ &\approx \Delta \cdot \mu^j + \sum_{i=1}^m \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} \mathbf{E} \left[\int_{-\infty}^{(k-1)\Delta} h_{i \rightarrow j}(t-s) dN_s^i \mid \mathbf{X}_{k-1}^{(\Delta)}, \mathbf{X}_{k-2}^{(\Delta)}, \dots \right] dt \\ &\quad (s \text{ についての積分区間を } (k-1)\Delta \text{ までとする}) \\ &\approx \Delta \cdot \mu^j + \Delta \sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{(k-1)\Delta} h_{i \rightarrow j}(k\Delta - s) \mathbf{E} \left[dN_s^i \mid \mathbf{X}_{k-1}^{(\Delta)}, \mathbf{X}_{k-2}^{(\Delta)}, \dots \right] \\ &\quad (dt \text{ に関する積分の長方形近似}) \\ &\approx \Delta \cdot \mu^j + \Delta \sum_{i=1}^m \int_{(k-p-1)\Delta}^{(k-1)\Delta} h_{i \rightarrow j}(k\Delta - s) dN_s^i \quad (\text{過去の影響を } p \text{ 期前まででカットオフ}) \\ &\approx \Delta \cdot \mu^j + \Delta \sum_{i=1}^m \sum_{\ell=1}^p \int_{(k-\ell-1)\Delta}^{(k-\ell)\Delta} h_{i \rightarrow j}(\ell\Delta) dN_s^i \quad (\text{カーネル関数を区分的定数と見なす}) \\ &= \Delta \cdot \mu^j + \Delta \sum_{i=1}^m \sum_{\ell=1}^p h_{i \rightarrow j}(\ell\Delta) \left(N_{(k-\ell)\Delta}^i - N_{(k-\ell-1)\Delta}^i \right) \\ &= \Delta \cdot \mu^j + \Delta \sum_{i=1}^m \sum_{\ell=1}^p h_{i \rightarrow j}(\ell\Delta) X_{k-\ell}^{(i, \Delta)} \\ &= \Delta \cdot \mu^j + \Delta \sum_{\ell=1}^p \sum_{i=1}^m h_{i \rightarrow j}(\ell\Delta) X_{k-\ell}^{(i, \Delta)}. \end{aligned}$$

こうして (5) の近似式が得られた。

付録 C Embrechts-Kirchner の推定法における Hawkes グラフ導出のアルゴリズム

以下では、Embrechts-Kirchner の推定法において、最終的にグラフの辺が有意であると判断する際に重要となる「辺の重み」の推定値 $\hat{a}_{i\ell, j}$ の標準誤差 $\hat{\sigma}_{i, j}^2$ の計算アルゴリズムを掲載しておく。

*18 下から 2 つ目の近似は、カーネル関数 $h_{i \rightarrow j}(t)$ の台が有限で $[0, p\Delta]$ がその台も含むのであれば、真の等号として成立する。

Hawkes スケルトン表現の推定における $\hat{\sigma}_{i,j}^2$ の計算アルゴリズム

1. $\mathbf{E} \in \{0,1\}^{m^2 \times (m^2 p + m)}$ をベクトル $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_{m^2}$ をすべて転置して行ベクトルとして、行方向に順に並べた行列とする。
2. (8) 式で求めた \mathbf{Z} を用いて、 $\mathbf{E}(\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^\top \otimes \mathbf{1}_{m \times m} \in \mathbb{R}^{m^2 \times (m(n-p))}$ という行列計算を行い、得られた行列の各行ベクトルを転置して列ベクトルに変換し、それを順に列方向に積み重ねて、 $m^3(n-p)$ -次元ベクトルを作る。さらにこのベクトルを順に m 個の $m^2(n-p)$ -次元ベクトルに分割し、それらのベクトルを行ベクトルに転置して、行方向に順に並べて $\mathbb{R}^{m^2(n-p) \times m}$ -行列を作る。この行列を \mathbf{C} とする。
3. $(\mathbf{U}_{p+1}, \mathbf{U}_{p+2}, \dots, \mathbf{U}_n)^\top := \mathbf{U} = (\mathbf{Y} - \Delta \mathbf{Z} \hat{\mathbf{H}}^{(\Delta_{skel}, p)}) \in \mathbb{R}^{(n-p) \times m}$ を計算する。このとき \mathbf{U} の m 次元の行ベクトルは $\mathbf{U}_k = \left(\mathbf{X}_k^{(\Delta)} - \Delta \hat{\boldsymbol{\mu}} - \sum_{\ell=1}^p \Delta \hat{\mathbf{H}}_\ell^\top \mathbf{X}_{k-\ell}^{(\Delta)} \right)$ ($k = p+1, p+2, \dots, n$) と表される。さらに、この \mathbf{U} を m^2 個行方向に並べて得られる行列を $\mathbf{U}^{(rep)} \in \mathbb{R}^{m^2(n-p) \times m}$ とする。
4. 同じ成分どうしをかける行列のアダマール積 $\mathbf{C} \odot \mathbf{U}^{(rep)}$ を求め、得られた行列の各行の m 個の成分の和を 2 乗して、 $m^2(n-p)$ -次元ベクトルを作る。次に、このベクトルを順に m^2 個の $(n-p)$ -次元ベクトルに分割し、それらのベクトルを行ベクトルに転置して、行方向に順に並べて $\mathbb{R}^{m^2 \times (n-p)}$ -行列を作る。さらに、得られた行列の各行の $(n-p)$ 個の成分の和を計算することで m^2 -次元ベクトルを得る。
5. 上で得られた m^2 -次元ベクトルを順に m 個の m -次元ベクトルに分割し、それらのベクトルを行ベクトルに転置して、行方向に順に並べて得られる $\mathbb{R}^{m \times m}$ -行列が求める $(\hat{\sigma}_{i,j})_{(i,j) \in [m]^2}$ となる。

Hawkes グラフ推定における $\hat{\sigma}_{i_\ell, j}^2$ および $\hat{\sigma}_j^2$ の計算アルゴリズム

まず時間単位を Δ_{graph} に変更することで選び直された k 番目の時間区間に対するカーネル関数の推定値にあたる m_j -次元ベクトルを

$$\hat{\mathbf{H}}_{PA(j)}(k\Delta_{graph}) := (\hat{h}_{i_1 \rightarrow j}(k\Delta_{graph}), \hat{h}_{i_2 \rightarrow j}(k\Delta_{graph}), \dots, \hat{h}_{i_{m_j} \rightarrow j}(k\Delta_{graph}))$$

と与える。ただし、 $k \in [p]$, $PA(j) = \{i_1, i_2, \dots, i_{m_j}\}$ とする。また、これら p 個の m_j -次元ベクトルを順に並べ、最後に $\hat{\boldsymbol{\mu}}_j$ を加えて作られる $(pm_j + 1)$ -次元ベクトルを $\hat{\mathbf{H}}_j^{(\Delta_{graph}, p)}$ とする。

推定量ベクトル $\hat{\mathbf{H}}_j^{(\Delta_{graph}, p)}$ は以下で推定できる^{*19}。

$$\hat{\mathbf{H}}_j^{(\Delta_{graph}, p)} = \frac{1}{\Delta_{graph}} (\mathbf{Z}_j^\top \mathbf{Z}_j)^{-1} \mathbf{Z}_j^\top \mathbf{Y}_j.$$

ただし、この $\mathbf{Y}_j, \mathbf{Z}_j$ はそれぞれ (7), (8) 式において、 $\Delta = \Delta_{graph}$ および $m = m_j$ として、いずれも j に対しての推定結果のみを含んだ行列としている。

前のアルゴリズムとほぼ同様の以下の手順で、 (i_ℓ, j) (ただし $\ell \in [m_j], j \in [m]$) に対して $\hat{\sigma}_{i_\ell, j}^2$ が得られ、これから信頼区間を作り出すことで最終的に Hawkes グラフ表現が得られる。

1. (i_ℓ, j) に対し、 $\mathbf{e}(i_\ell, j)$ を $(k-1)m_j + \ell$ -成分^{*20} ($k \in [p]$) だけ 1 で、残りは 0 となる $(m_j p + 1)$ -次元ベクトルとする。

^{*19} 推定された Hawkes グラフ表現に整合的な強度過程の事後パスは、この推定量に基づいて得ることができる。

^{*20} 原論文では $(k-1)m_j + (\ell-1)$ -成分となっていたが、 $k=1, \ell=1$ で意味をなさない。

2. $(n-p)$ -次元ベクトル $C_{l,j} := \left((\mathbf{Z}_j^\top \mathbf{Z}_j)^{-1} \mathbf{Z}_j^\top \right)^\top e_{(i_\ell, j)}$ を計算する。
3. $(n-p)$ -次元ベクトル $U_j = \mathbf{Y}_j - \Delta_{graph} \mathbf{Z}_j \hat{\mathbf{H}}_j^{(\Delta_{graph}, p)}$ を計算する。
4. アダマール積 $C_{l,j} \odot U_j$ として得られるベクトルの各成分を 2 乗して各成分を足すと $\hat{\sigma}_{i_\ell, j}^2$ が得られる。
5. $(n-p)$ -次元ベクトル \mathbf{Z}_{Last} を $((\mathbf{Z}_j^\top \mathbf{Z}_j)^{-1} \mathbf{Z}_j^\top)$ の最終行とすると、アダマール積 $\mathbf{Z}_{Last} \odot U_j$ として得られるベクトルの各成分を 2 乗して各成分を足した後に Δ_{graph}^2 を乗ずることにより、 $\hat{\sigma}_j^2$ が得られる。

付録 D Hawkes グラフ表現の各辺が有意と推定された期間

推定期間の違いによる Hawkes グラフ表現の推定結果への影響を調査するために、業種カテゴリおよび企業規模カテゴリそれぞれに対して次のような調査を行った。なお、この分析では $\Delta_{graph} = 1/365$ としている。

1. 最初に、2003/1/1~2005/12/31 (1096 日分) に対して Embrechts-Kirchner の推定法を用いる。その後は推定に用いるサンプル日数は **1096 日分** を固定しながら (**moving-window 方式**) 1 日ずつ期間をずらして Embrechts-Kirchner の推定法を逐次繰り返す
2. 最初に、2003/1/1~2005/12/31 (1096 日分) に対して Embrechts-Kirchner の推定法を用いる。その後は推定に用いるサンプル数を増やしながら (**サンプル累積方式**) 1 日ずつ期間をずらして Embrechts-Kirchner の推定法を逐次繰り返す

図 12 は、業種カテゴリおよび企業規模カテゴリそれぞれに対して「moving-window 方式」と「サンプル累積方式」で推定した Hawkes グラフにおいて、それぞれの自己励起性・相互励起性について有意と選択された期間を表している。

moving-window 方式の結果をみると、有意となる自己励起性・相互励起性は、推定に用いるサンプル期間によって大きく異なることが確認される。業種カテゴリにおける「製造関係→金融関係」という相互励起性が認められる期間が比較的長いものの、期間全体を通じて moving-window 方式による推定で有意となる伝播の自己励起性・相互励起性は無い。moving-window 方式は直近 3 年分の伝播関係を捕捉するとも考えられ、推定の結果有意となった自己励起性・相互励起性は、むしろその時点におけるマクロ経済の状況で説明されてしまう可能性が十分にある。

一方のサンプル累積方式は moving-window 方式の結果と大きく異なっている。サンプル累積方式では、ある時点で自己励起性・相互励起性が有意と認められると、その伝播性はそれ以降の比較的長い期間続けて有意に現れるケースが多い。両者を比較したとき、直近に認められる伝播関係を捕捉する moving-window 方式に比べて、サンプル累積方式は伝播関係を過大評価しているとも考えられる。

いずれにしても、本文でも触れたようにマクロ経済変数等の要因を除外したうえで、それでもなお倒産リスクの自己励起性・相互励起性が残るかどうかを分析することが次の課題である。

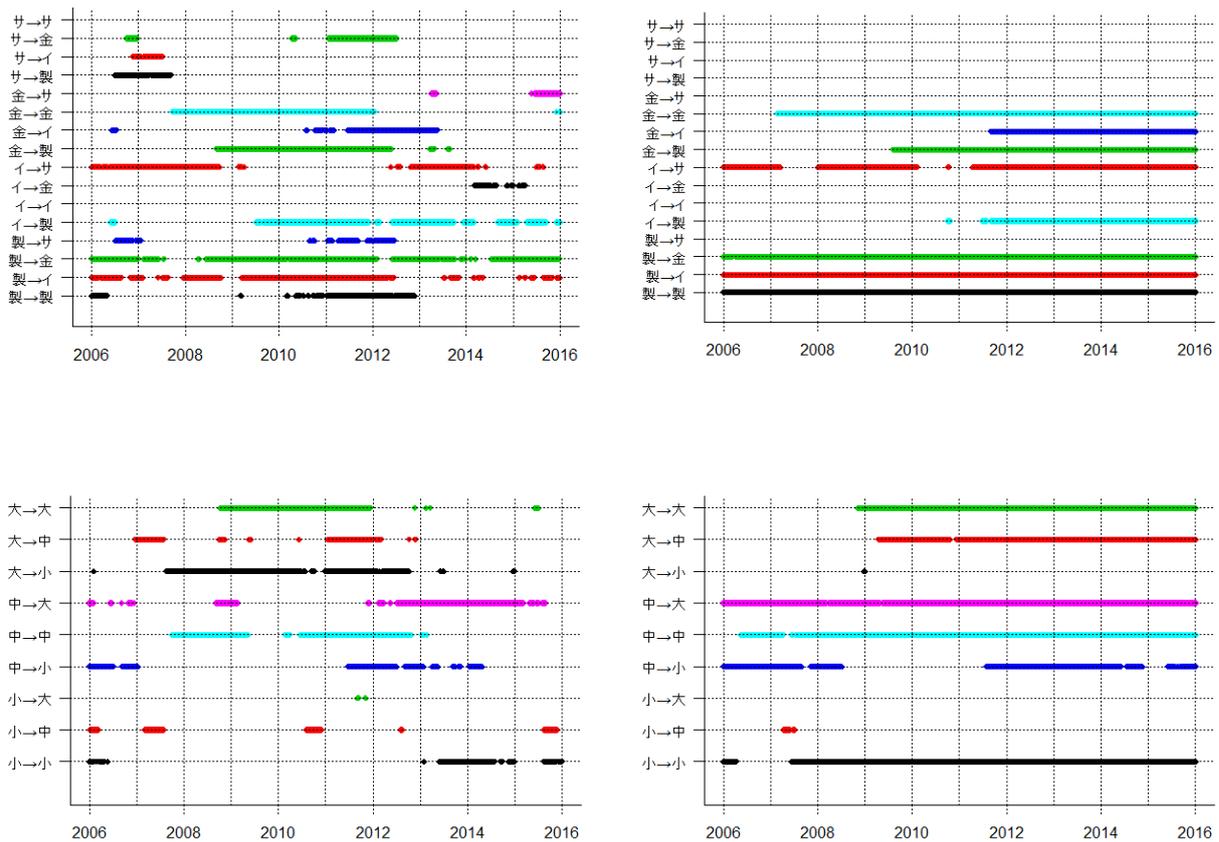


図 12 2006 年初から 2015 年末の各日で推定された Hawkes グラフのうち、それぞれの自己励起性・相互励起性について有意と選択された期間。左上が「業種カテゴリの moving-window 方式」に対する結果、右上が「業種カテゴリのサンプル累積方式」に対する結果。「製」は製造関係、「イ」はインフラ・流通関係、「金」は金融関係、「サ」はサービス関係のカテゴリをそれぞれ示す。また、左下が「企業規模カテゴリの moving-window 方式」に対する結果、右下が「企業規模カテゴリのサンプル累積方式」に対する結果。