



HUB-FS Working Paper Series

FS-2018-J-002

バーゼルⅢ 適格 Additional Tier1 債券（AT1 債）に 対する構造型プライシングモデルの改良と実証分析

杉山 泰平

一橋大学大学院 国際企業戦略研究科 修了生

中川 秀敏

一橋大学大学院経営管理研究科

First version: 2018 年 6 月 13 日

Current version: 2019 年 6 月 6 日

All the papers in this Discussion Paper Series are presented in the draft form. The papers are not intended to circulate to many and unspecified persons. For that reason any paper can not be reproduced or redistributed without the authors' written consent.

バーゼル III 適格 Additional Tier1 債券 (AT1 債) に対する構造型プライシングモデルの改良

杉山 泰平* 中川 秀敏†

* 一橋大学大学院 国際企業戦略研究科修了生

† 一橋大学大学院 経営管理研究科

概要. Additional Tier1 債券 (AT1 債) は、強制元本削減トリガー条項が付されたデフォルト可能性のある債券である。本論文では、完全情報および不完全情報下において、財務トリガーや PONV トリガーと呼ばれる元本削減トリガーを考慮できるように改良した構造型の AT1 債プライシングモデルを提案する。そして、日欧の実際の AT1 債の市場価格データを用いた実証分析を通じて、提案するモデルの有用性を検討する。

An Improvement of Structural Pricing Model for Additional Tier1 (AT1) Bonds

Taihei Sugiyama* Hidetoshi Nakagawa†

*Graduate School of International Corporate Strategy, Hitotsubashi University

†Department of Business Administration, Hitotsubashi University Business School

Abstract. Additional Tier1 (AT1) bond is a defaultable fixed income security with some pre-specified triggers for mandatory principal reduction. In this paper, we improve a structural AT1 bond pricing model so as to consider not only default but such principal-reduction trigger events such as Point Of Non-Viability trigger” as well as accounting trigger under both complete and incomplete information. We use some market price data of AT 1 bonds issued in Japan and Europe to discuss practical usefulness of our proposed model.

1. はじめに

バーゼル III 規制の観点から銀行のバランスシートを俯瞰した際、調達側の基本構造を以下のように捉えることができる。

- 普通株式等 Tier1 資本 (Common Equity Tier 1 Capital, CET1 資本)
- 普通株式等を除くその他 Tier1 資本 (要件を満たす優先株や「AT1 債」など) (Additional Tier 1 Capital : AT1 資本)*¹
- Tier2 資本 (要件を満たす劣後債, 劣後ローン, 一般貸倒引当金など)

*¹ CET1 資本と AT1 資本の合計が「Tier1 資本 (Tier 1 Capital)」となる。

- 上記以外の資本（預金、普通社債といったシニア債務など）

バーゼルⅢ規制においては、国際的に活動する銀行に対して、「リスクアセット額」対比での「規制自己資本 (Tier1 資本と Tier2 資本の合計) 比率」を 8% 以上、「Tier1 比率」を 6% 以上、「CET1 比率」を 4.5% 以上とにすることが必要とされる。

その意味では、CET1 資本を増やすことが最も重要ではあるが、Tier1 資本を補完するという点で「AT1 資本」を増やすことも銀行の資本政策上は重要である。

「AT1 資本」の例としては、普通株よりも配当金を優先的に受けられるかわりに議決権が付されない「優先株」が挙げられるが、近年では AT1 資本に算入可能な債券（負債と資本の両方の性格を有することからハイブリッド証券とも呼ばれる）も、規制上の自己資本（regulatory capital）を増強させる目的で世界各国の金融機関によって発行されるようになってきている。

AT1 資本に算入可能な債券は「バーゼルⅢ 適格その他 Tier1 債券 (Basel III Compliant Additional Tier 1 bond)」と呼ばれるが、一般に略して「AT1 債」と呼ばれることも多く、本論文でも以降「AT1 債」と呼ぶことにする。

AT1 債の適格要件の詳細は、Basel Committee on Banking Supervision（以降、BCBS）[1] にて定められている。BCBS [1] や De Spiegeleer et al. [6] によると、投資家にとっての「AT1 債の元本が毀損する、もしくは 期日通りの利払いがなされないリスク^{*1}」に関連する AT1 債特有の契約事項として、主に以下のようなことが挙げられる。

- 財務トリガー（Accounting Trigger）への抵触リスク：発行体の CET1 比率（CET1 資本の額をリスクアセット額で割ったもの）が事前に定めた閾値に抵触すると、強制的に債券の元本削減あるいは株式への転換が発動される。
- PONV トリガー（Point Of Non-Viability Trigger）への抵触リスク：発行体に対して経営危機や債務超過等の懸念が生じた際、発行体を規制する監督当局の決定により、強制的に債券元本の削減あるいは株式への転換が発動される。
- 償還時期の不確実性（Extension Risk）：AT1 債は満期のない永久債の形をとるが、通常は初回償還日に元本が償還されることが想定されている。しかし、発行体の裁量により初回償還日に償還されないこともあるため、投資家にとってはリスクとして認識される。
- 利払い消滅リスク（Coupon Cancellable Risk）：AT1 債は発行体に対し債券の利払いに関する裁量（利払いの停止等）を認めていることから、発行体の裁量により投資家の期中受取利息額が減少してしまうリスクがある。

AT1 債は、同一発行体の同程度の年限を有する普通社債に比して高水準のクーポンが設定されている一方、上記のように普通社債には見られない投資家のリスク要因となる様々な契約条件が付されている。そのため投資家は、発行体のデフォルト（債務不履行）リス

^{*1} 本論文における「AT1 債の信用リスク」の定義である。

クに加え、AT1 債が有する各種契約条件を考慮した上でのプライシングやリスク管理をおこなうことが求められる。

これらのリスクのうち、「財務トリガー（事前に定めた資本要件）」および「PONV トリガー（監督当局による決定）」は外的な強制力によってもたらされるリスクであると認識できる。その一方で、「償還時期の不確実性」および「利払い消滅リスク」は、発行体があらゆる要因を考慮したうえで、初回償還可能日に償還するかどうか、あるいは利払いを予定された期日通りに実行するかどうかについての決定をする裁量権を有していることに起因するリスクと認識できる。

「償還時期の不確実性」および「利払い消滅リスク」を考慮しないことで、AT1 債のリスクを過小評価する可能性はあるが、これら二つのリスクが発生するシナリオを発行体の資産価値過程のみを用いて合理的かつ簡潔にモデルに反映させることは難しいと考え、本研究のモデルではこれら二つのリスクについては考慮しないこととする。

したがって、本論文の目的は、上述した AT1 債特有の契約事項のうち、特に「財務トリガー」と「PONV トリガー」の両方を有する AT1 債に対する新しい実用可能なプライシングモデルを設定し、同時にその設定モデルに対して実際の AT1 債の市場価格データを用いて実証分析をおこない、主に信用リスクの観点からそうしたトリガーの AT1 債プライシングへの影響についての理解を深めていくことである。

Liberadzki and Liberadzki [13] によると、AT1 債プライシングの研究方法は主に「構造型モデル (Structural Model)^{*1}」と「マーケットインプライドモデル (Market Implied Model)」と呼ばれる二つの異なるモデルに基づくアプローチに分類される。

このうち、マーケットインプライドモデルは、De Spiegeleer and Schoutens [7] で提唱されている「クレジットデリバティブモデル (Credit Derivatives Model)」や「株式デリバティブモデル (Equity Derivatives Model)」が有名な例であり、AT1 債の市場価格の変動の特徴をつかむうえで非常に便利なモデルであると考えられている。

一方で、AT1 債に設定されているトリガー条件としては、上述したように、発行体の財務状態が債券の元本削減あるいは株式への転換の引き金（トリガー）となる「財務トリガー」や「PONV トリガー」が設定されることが一般的である。この点で、Rösler [16] が指摘しているように、証券取引市場で観測される数値基準や挙動に AT1 債のペイオフが依存していることを前提にしているマーケットインプライドモデルは、発行体の財務状態に関連するトリガー条件を設定している AT1 債とは整合的であるとは言えない側面がある。

バランスシートの状態に関連する財務トリガーや PONV トリガーの性質がもたらす AT1 債の信用リスクの特徴を素直にモデルに織り込むことを重視する観点から、本論文では、Rösler [16] の構造型モデルのアプローチを採用する。ただし、PONV トリガーは監督当局の判断に基づくものであり、厳密にはバランスシートの状態に依存して発動するこ

^{*1} より具体的には「初到達時刻 (first-passage time) モデル」と呼ばれるモデルを用いることになる。

とが明示されているわけではないため、先行研究である Rösler [16] のプライシングモデルにおいては、PONV トリガーは考慮されていない。

そのため、本論文では「監督当局は発行体の資産価値を完全観測できる立場にあり、発行体の資産価値がデフォルト発生閾値と同水準、もしくはそれよりも高い水準にまで下落した時点で PONV トリガーを発動する」という仮定において、PONV トリガーを初到達時刻モデルの枠組みで扱えるようにした AT1 債のプライシングモデルを新たに提案する。

また、Rösler [16] と同様に、「投資家には発行体の資産価値は正確に観測することはできない」という不完全情報を考慮したモデルを検討する。

以上をふまえると、本論文で取り組む課題は次の三点にまとめられる。

- (1) 財務トリガーや PONV トリガーへの抵触条件を適切に定式化することで、構造型モデルの枠組みで AT1 債のプライシングモデルを設定すること。
- (2) 投資家は発行体の資産価値に対して不完全情報しか持ちえないということをプライシングに反映させる適切なモデルを設定すること。
- (3) 本論文で提案するプライシングモデルに基づく理論価格と実際の AT1 債の市場価格を実証分析を通じて比較して、本論文で提案するプライシングモデルの有用性について検討すること。

本論文の構成は以下の通りである。

第 2 節では、理論モデルとして、構造型モデルのアプローチに立脚し、財務トリガーや PONV トリガーに対しても資産価値過程に対する初到達条件として定式化した AT1 債プライシングモデルを提案する。その後、実証分析において具体的なモデル価格を算出するための分析モデルとして、プライシングモデルにインプットする各種パラメータの推定手法等について説明する。第 3 節では、実際に発行された日本と欧州二つの AT1 債を用いた実証分析の方法を提示する。第 4 節では、分析結果を示し、モデル価格、およびモデル価格と市場価格の比較から得られる示唆について記す。最後に、全体のまとめと追加的な課題について述べる。

2. プライシングモデルの設定

本節では、全般にわたって主に Rösler [16] にて述べられている手法を中心にまとめながら、第 2 節の実証分析にて用いる構造型モデルに基づいた AT1 債プライシングモデルの設定をおこなう。なお、一部の数式表現については、第 3 節の実証分析に即した形で調整・修正をおこなっている。

前半部分である 2.1 小節「理論モデル」では、構造型モデルを用いた債券のプライシングモデルの定式化をおこなう。2.1.1 項では構造型モデルの概要と、普通社債に対するプライシングを想定したモデル価格を設定する。続いて 2.1.2 項および 2.1.3 項にて、構造型モデルに AT1 債の各種トリガー条件を織り込むことで、本題である AT1 債に対する

プライシングを想定したモデル価格を設定する。また、財務トリガーについては本来 CET1 比率を通じた定式化が一般的であるが、対数 CET1 比率と対数資産価値の間にシンプルな関係があると仮定することで、財務トリガーについても資産価値過程に対する初到達条件として定式化可能なことを、2.1.4 項で論じる。前半部分の最後となる 2.1.5 項では、発行体と投資家が持ち得る情報として、発行体の情報について正確に把握できている状態（「完全情報」）と、一部の情報が正確に把握できない状態（「不完全情報」）をそれぞれ設定する。

一方、後半部分である 2.2 小節「具体的な分析モデル」では、2.1 小節にて示した債券のプライシングモデルを実証分析に適用するにあたり必要となる各種モデルについて示していく。2.2.1 項ないし 2.2.2 項では、プライシングモデルにインプットする各種パラメータの推定方法について述べている。2.2.3 項では、モデル価格を算出するにあたり必要となる条件付確率を求めるための手法として、モンテカルロ・シミュレーションのアルゴリズムについて説明する。

2.1 理論モデル

2.1.1 構造型モデル

構造型モデルは、債券の信用リスクをモデル化する手法の一つである。構造型モデルは、Merton [15] における「企業が発行する割引債の満期時点において、その企業の資産価値が負債額面を下回った状態をデフォルト（債務不履行）と定めたモデル」が嚆矢とされている。

本論文では、Black and Cox [5] にその由来を求めることができる「初到達時刻 (first passage time) モデル」の枠組みでモデル化をおこなう。初到達時刻モデルは、デフォルトが満期時点でのみ起こりうると想定している Merton [15] モデルとは異なり、割引債の満期以前であっても、発行体である企業の資産価値が事前に設定された「閾値 (threshold)」以下に落ち込んだ時点を「デフォルト（発生）時刻」と定義し、早期デフォルトの可能性を認めるモデルになっている。

これ以降では、数学的にモデルを導入していく。

まず、連続時間 $[0, \infty)$ の設定で、フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, \infty)}, \mathbf{Q})$ を導入し、すべての確率過程がフィルトレーション \mathbb{G} -適合であるという前提をおく。ここで、 \mathbf{Q} はリスク中立確率測度を表すと仮定する。

次に、発行体の資産価値を表す確率過程を $V = (V_t)_{t \in [0, \infty)}$ と表す。時刻 0 における資産価値は定数 $V_0 (> 0)$ とする。発行体は、負債の満期前であっても、時間とともにランダムに変動する資産価値が、債権者との契約で事前に定められた閾値まで低下した際に「デフォルト」に陥ると仮定する。

本論文では、デフォルトの閾値を「発行体の負債額面」と定め、定数 $K \in (0, V_0)$ で表す

ことにする。これより、デフォルト時刻 τ を

$$(2.1) \quad \tau := \inf\{t > 0 \mid V_t \leq K\}.$$

と定義する ($\inf \emptyset = \infty$ とする)。

資産価値過程 (V_t) はフィルトレーション \mathbb{G} に関して適合すると仮定している、すなわち資産価値過程 (V_t) の真の値をリアルタイムで観察できることを暗に想定している。したがって (V_t) が連続過程であれば、(2.1) 式によって定義されるデフォルト時刻 τ は、フィルトレーション \mathbb{G} に関する (可予測な) 停止時刻 (stopping time) として特徴づけられる。割引債の価格付けの問題は、 \mathbb{Q} の下での τ の確率分布を求める問題におおよそ帰着されることになる。

これ以降は、初到達時刻モデルの枠組みで AT1 債のプライシングを考えていく。AT1 債は永久債として発行されるが、現実的には初回償還可能日に償還されるものと見なされるので、初回償還可能日を満期時点 T として考えていく。

また前節で触れたように、AT1 債のプライシングにおいては、発行体のデフォルトだけでなく、財務トリガーという概念をモデルに織り込むことが重要となる。

本論文では、財務トリガーを、発行体の CET1 比率 (CET1 資本の額をリスクアセット額で割ったもの) が一定水準以下となったときに発動されるイベントと定義し、財務トリガーの発動によって債券元本が 100% 削減される、いわゆる “Full Write-down” 型の AT1 債であると仮定することにする。

また、Rösler [16] のモデルと同様に、財務トリガー抵触とデフォルト発生を区別して扱うこととする。具体的には、デフォルト状態に陥るか否かは、発行体の資産価値を常に (連続的に) 観察して、閾値に達するかどうかを常にチェックするのに対して、財務トリガーが発動するか否かについては、発行体の CET1 比率を定期的な離散時点でのみ観察して、財務トリガーの発動条件に抵触しているか否かをチェックするという前提に基づいてモデルを構築する。

CET 比率の観測時点を定期的な離散時点とする理由は、通常は発行体の CET1 比率が発行体の四半期決算の発表にあわせて公表されているためである。発行体の CET1 比率が財務トリガーへ抵触したか否かを確認するためには、参照指標である発行体の CET1 比率が公表されているか、もしくは監督当局に報告されていることが必要であり、財務トリガーに抵触するかどうかを判定するタイミングが実質的に年に 4 回であることと整合的な前提であると考えられる。

ここで、CET1 比率を表す確率過程 $\text{CET1R} = (\text{CET1R}_t)_{t \in [0, \infty)}$ を設定する。また、CET1 比率に対する財務トリガー発動の閾値を、正の定数 K_{ACC} で表すとする。

財務トリガー抵触による AT1 債の債券元本の削減、ないしは株式への転換が発生する時刻を、本論文では「財務トリガー抵触時刻」と呼び、 θ_{ACC} と表すことにする。ただし、Rösler [16] の手法にならない、発行体の四半期決算発表タイミングを想定した時点のみで可能と仮定する。

具体的には以下のように定式化する．対象となる AT1 債の発行時点の直前の四半期決算発表時点から発行時点までの経過時間を $t_0 \in [0, 0.25)$ として固定して，発行体の四半期決算発表時点の集合を $\mathcal{T}_{\text{qtr}} = \{0.25k - t_0 \mid k \in \mathbb{N}\} = \{0.25 - t_0, 0.50 - t_0, 0.75 - t_0, 1 - t_0, \dots\}$ と表す．そして，「財務トリガー抵触時刻」 θ_{ACC} を \mathcal{T}_{qtr} 上での CET1 比率の財務トリガー閾値への初到達時刻として，以下のように定義する．

$$(2.2) \quad \theta_{\text{ACC}} := \inf\{t \in \mathcal{T}_{\text{qtr}} \mid \text{CET1}R_t \leq K_{\text{ACC}}\}.$$

次に，発行体の資産価値過程 (V_t) の \mathbf{Q} の下での挙動を，Merton [15] や Black and Cox [5] に倣い以下のように定式化する．

$$(2.3) \quad dV_t = (r - \delta)V_t dt + \sigma_V V_t dW_t.$$

ここで， r はリスクフリーレート， δ は発行体の資産価値の外部流出率， σ_V は資産価値のボラティリティ， $(W_t)_{t \in [0, \infty)}$ は \mathbf{Q} の下での標準ブラウン運動である．

Frey and Schmidt [10] では，発行体の株価の挙動を幾何ブラウン運動で表現することは非現実的なモデルであることが知られているが，発行体の資産価値の挙動を幾何ブラウン運動で表現することについては，Leland and Toft [12] や Duffie and Lando [8] 等，多くの構造型モデルの先行研究にて用いられており，これまでの経験的見地（“empirical grounds”）から，当該仮定を用いることについては弁護し得るものである（“defendable”），と述べられている．

なお，デフォルトリスクのある満期 T の固定利付債の $t (\leq T)$ 時点における残存期間に対する割引キャッシュフロー構造 $\Pi_{t,T}^{\text{Def}}$ を，本論文では Rösler [16] を参考とし以下のように定義する．

$$(2.4) \quad \Pi_{t,T}^{\text{Def}} := \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{\{t \leq t_i\}} \mathbf{1}_{\{\tau > t_i\}} e^{-r(t_i-t)} c_i + \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} e^{-r(T-t)} N.$$

ここで， ℓ は時点 $t = 0$ から債券の満期 T までの間の利息の総支払回数， t_i は $t = 0$ から見て i 回目の利息支払い時点， c_i は i 回目の支払利息額， N は債券の元本としている．なお本論文においては，“Full Write-down”型の AT1 債を対象にすることと整合させるため，発行体のデフォルト発生後の債券元本回収率も一律 0% に設定する．

(2.4) 式をふまえると，デフォルトリスクのある満期 T の固定利付債の $t (\leq T)$ 時点におけるモデル価格 $P_{t,T}^{\text{Def}}$ は，Rösler [16] を参考にすると，リスク中立評価法によって以下のように定義できる．

$$(2.5) \quad \begin{aligned} P_{t,T}^{\text{Def}} &:= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[\Pi_{t,T}^{\text{Def}} \mid \mathcal{G}_t \right] \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{\{t \leq t_i\}} e^{-r(t_i-t)} c_i \mathbf{Q}(\tau > t_i \mid \mathcal{G}_t) + \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} e^{-r(T-t)} N \mathbf{Q}(\tau > T \mid \mathcal{G}_t). \end{aligned}$$

2.1.2 財務トリガーを考慮した構造型の AT1 債プライシングモデル

前項で述べたように、ここでは財務トリガー抵触後の債券元本削減率を 100% とする “Full Write-down” 型 AT1 債を考えており、発行体のデフォルト発生後の債券元本回収率も一律 0% に設定している。つまり、デフォルト発生または財務トリガー抵触発生のいずれかが起こった時点 $\tau \wedge \theta_{\text{ACC}}$ 以降は当該債券からのキャッシュフローは発生しないと仮定することになる（ここで $a \wedge b := \min\{a, b\}$ とする）。

これより、 t 時点から「満期」 T （永久債ではあるが、初回償還可能日を「満期」と仮定したことに注意）までの間の割引キャッシュフロー構造 $\Pi_{t,T}^{\text{Def,ACC}}$ は、(2.4) 式を、財務トリガー抵触時刻と財務トリガー抵触後の AT1 債の債券元本削減を付加する形で修正することで、Rösler [16] にならい、以下のように定義することができる。

$$(2.6) \quad \Pi_{t,T}^{\text{Def,ACC}} := \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{\{t \leq t_i\}} \mathbf{1}_{\{\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i\}} e^{-r(t_i-t)} c_i + \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > T\}} e^{-r(T-t)} N.$$

したがって、デフォルトと財務トリガーの概念を織り込んだ、初回償還可能時点 T の “Full Write-down” 型 AT1 債のモデル価格 $P_{t,T}^{\text{Def,ACC}}$ 式は、(2.6) 式より、リスク中立評価法によって以下のように定義できる。

$$(2.7) \quad \begin{aligned} P_{t,T}^{\text{Def,ACC}} &:= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[\Pi_{t,T}^{\text{Def,ACC}} \mid \mathcal{G}_t \right] \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{\{t \leq t_i\}} e^{-r(t_i-t)} c_i \mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i \mid \mathcal{G}_t) + \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} e^{-r(T-t)} N \mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > T \mid \mathcal{G}_t). \end{aligned}$$

2.1.3 PONV トリガーを考慮した構造型の AT1 債プライシングモデル

2.1.2 項にて紹介した通り、Rösler [16] の AT1 債のプライシングモデルは、構造型モデルを前提に、停止時刻としてデフォルト時刻と財務トリガー抵触時刻を導入し、AT1 債の元本および利息のペイオフを特徴付けたものである。しかし、Rösler [16] は、PONV トリガーの概念を自身のプライシングモデルには組み込んでいない*1。

BCBS [1] において、AT1 資本を含む Tier1 資本は “going-concern capital” つまり、金融機関が破綻に陥ることなく事業が継続できるよう、金融機関が被る損失を吸収するための資本であることが示唆されている。このことから、発行体にデフォルトが生じる前に PONV トリガーが発動することで、AT1 資本が損失を吸収することが実務上期待されている。したがって、AT1 債プライシングモデル構築の際、PONV トリガーの概念を導入することについては一定の合理性があるものと考えられる。

*1 PONV トリガーではなく、発行体の株価が定められた閾値以下になるときに発動される “market trigger” に言及している。

先述の通り、PONV トリガーが発動するタイミングは監督当局の判断に委ねられている。PONV トリガーを Rösler [16] のプライシングモデルに追加するためには、PONV トリガーをどのように定義し、デフォルト発生や財務トリガー抵触とどのような関係にあるかを明確にする必要がある。

本論文では、PONV トリガーの概念を以下のような考え方のもとに追加することとする。

- PONV トリガーは、発行体のデフォルト発生、もしくは、発行体がデフォルト状態になくとも、発行体の資産価値が負債価値に「非常に近づいている」ため、発行体の事業継続が難しいと監督当局によって判断された時点で発動する。
- PONV トリガー抵触閾値は、デフォルト発生閾値と同水準、もしくはより高い水準にあることを想定する。（したがって、後述するが、このような PONV トリガー抵触を考慮する場合は、デフォルトと同時かそれ以前に PONV トリガー抵触が必ず発生するので、デフォルトを考慮する必要がなくなる。）
- 財務トリガー抵触後に PONV トリガーに抵触することはなく、また PONV トリガー抵触後に財務トリガーに抵触することもない。要するに、財務トリガーまたは PONV トリガーのどちらか先に発動した方だけを考慮すればよい。
- PONV トリガーは監督当局の判断で発動する。監督当局は発行体の内部者と同様、発行体の資産価値を完全、かつ連続的に把握できる主体（インサイダー）であるとする。

まず、正の定数 K_{PONV} を発行体の資産価値過程に対する PONV トリガー閾値とし、 $V_0 > K_{\text{PONV}} \geq K$ を満たすと仮定する。そのうえで、PONV トリガー抵触時刻 θ_{PONV} を以下のように定義する。

$$(2.8) \quad \theta_{\text{PONV}} := \inf\{t > 0 \mid V_t \leq K_{\text{PONV}}\}.$$

$K_{\text{PONV}} \geq K$ の仮定と (V_t) の連続性より、 $\theta_{\text{PONV}} \leq \tau$ が成り立つことが分かる。このことは、PONV トリガーを考慮した場合には、AT1 債のプライシングにおいてはデフォルト時刻 τ を考慮する必要がなくなることを意味する。

したがって、PONV トリガーの概念を織り込んだ AT1 債のプライシングモデルでは、財務トリガー抵触時刻 θ_{ACC} と PONV トリガー抵触時刻 θ_{PONV} の二つの停止時刻によって AT1 債の元本および利息のペイオフが特徴付けられることになる。

PONV トリガーを考慮した際の「(財務または PONV によるいずれかの早いほうの) トリガー発動時刻」を表す確率時刻を θ_{trigger} と表すと、結局

$$(2.9) \quad \theta_{\text{trigger}} := \theta_{\text{ACC}} \wedge \theta_{\text{PONV}} = \begin{cases} \theta_{\text{ACC}} & \text{if } \theta_{\text{ACC}} \leq \theta_{\text{PONV}} \\ \theta_{\text{PONV}} & \text{if } \theta_{\text{ACC}} > \theta_{\text{PONV}} \end{cases}$$

と定義される。

これより、PONV トリガーの概念を織り込んだ AT1 債のモデル価格式は、Rösler [16] を参考にすると (2.8),(2.9) から以下のように定義できる。

$$(2.10) \quad P_{t,T}^{\text{ACC,PONV}} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{\{t \leq t_i\}} e^{-r(t_i-t)} c_i \mathbf{Q}(\theta_{\text{trigger}} > t_i | \mathcal{G}_t) + \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} e^{-r(T-t)} N \mathbf{Q}(\theta_{\text{trigger}} > T | \mathcal{G}_t).$$

2.1.4 CET1 比率と資産価値との関係式

2.1.2 項および 2.1.3 項にて、AT1 債プライシングモデルに財務トリガー抵触時刻、および PONV トリガー抵触時刻の概念を導入した。2.1.2 項および 2.1.3 項の記載からも分かる通り、本論文の AT1 債プライシングモデルは、発行体の資産価値だけではなく CET1 比率の挙動を別途モデル化する必要がある。

本論文では Rösler [16] の手法を参考とし、発行体の資産価値と、発行体の CET1 比率との間に正の相関関係があると仮定して、以下のような関係式を設定する。

$$(2.11) \quad \log(\text{CET1R}_t) = c_1 + c_2 \log\left(\frac{V_t - K}{\text{RWAs}_t}\right).$$

ただし、 RWAs_t は時刻 t における発行体のリスクアセット (Risk-Weighted Assets) 額であり、 $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 > 0$ は推定すべきパラメータとする。

金融機関におけるバーゼル III 規制上の自己資本比率は、自己資本をリスクアセットという数値で除した数値で定義される。リスクアセットとは、金融機関が保有する資産について、資産クラスごとに定められたリスクウェイトという掛け目を乗じて算出された値のことを指す。その意味で (2.11) 式は、被説明変数を CET1 比率の自然対数、説明変数を金融機関の規制上の自己資本比率に準じた値の自然対数と設定し、両者の関係を線形近似したものと捉えることができる。

さらに、Rösler [16] と同様に、 $\beta > 0$ を金融機関の資産に適用されるリスクウェイトの加重平均に類似した指標と見なし、リスクアセットが常に資産価値の定数倍で表される、すなわち

$$\text{RWAs}_t = \beta V_t$$

が成り立つと仮定する。

この仮定により、(2.11) 式は

$$(2.12) \quad \log(\text{CET1R}_t) = c_1 + c_2 \log\left(\frac{V_t - K}{\beta V_t}\right) \Leftrightarrow \text{CET1R}_t = e^{c_1} \left\{ \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{K}{V_t}\right) \right\}^{c_2}$$

と変形することができる。

当該パラメータ値を推定できれば、関係式において所与の資産価値過程 (V_t) に対応した一对の CET1 比率過程 (CET1R_t) を導出することが可能となる。すなわち、このように仮定することで、デフォルト時刻 τ 、PONV トリガー抵触時刻 θ_{PONV} だけでなく、財務トリガー抵触時刻 θ_{ACC} も資産価値過程 (V_t) の初到達条件として定式化可能であることが分かる。

命題 2.1 $e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{\text{ACC}} < 1$ が成り立つとき、

$$(2.13) \quad \theta_{\text{ACC}} = \inf \left\{ t \in \mathcal{T}_{\text{qtr}} \mid V_t \leq \frac{K}{1 - (e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{\text{ACC}})^{\frac{1}{c_2}}} \right\}$$

が成り立つ。

一方、 $e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{\text{ACC}} \geq 1$ のときは $\theta_{\text{ACC}} = 0.25$ となる。

証明 (2.2) で与えられている θ_{ACC} の定義の条件 $\text{CET1R}_t \leq K_{\text{ACC}}$ を (2.12) を用いて V_t の条件として書き直すと、 $c_2 > 0, \beta > 0$ より

$$\text{CET1R}_t \leq K_{\text{ACC}} \Leftrightarrow e^{c_1} \left\{ \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{K}{V_t} \right) \right\}^{c_2} \leq K_{\text{ACC}} \Leftrightarrow \frac{K}{V_t} \geq 1 - (e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{\text{ACC}})^{\frac{1}{c_2}}$$

となる。ここで $e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{\text{ACC}} \geq 1$ とすると右端の不等式の右辺は 0 以下となり、この不等式は常に成り立つことになるので、 $\theta_{\text{ACC}} = \inf\{0.25k \mid k \in \mathbb{N}\} = 0.25$ となる。

一方 $e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{\text{ACC}} < 1$ のときは $1 - (e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{\text{ACC}})^{\frac{1}{c_2}} > 0$ であるので、上記の右端の不等式をさらに

$$V_t \leq \frac{K}{1 - (e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{\text{ACC}})^{\frac{1}{c_2}}}$$

と変形することができる。 □

なお、実証分析のためのパラメータ設定方法について議論している 3.3 節における c_1, c_2 の推定結果は、 $e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{\text{ACC}} < 1$ の条件を満たしていることが確認される。

また、以降では $e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{\text{ACC}} < 1$ を仮定して、

$$(2.14) \quad K_{\text{ACC}}^V := \frac{K}{1 - (e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{\text{ACC}})^{\frac{1}{c_2}}} (> K)$$

とおくことにする。

2.1.5 条件付き生存確率の計算

(2.5), (2.7), (2.10) および 2.1.4 項で仮定した CET1 比率と資産価値の関係式から、フィルトレーション \mathbb{G} を所与としたときの AT1 債のモデル価格の計算はいずれのケースも、何らかの閾値に対する資産価値過程の初到達時刻に関して、リスク中立確率測度 \mathbf{Q} 下での「条件付生存確率」を計算することに帰着されることが分かる。

(2.7) 式を例にとると、ある時点 t における AT1 債の将来の利払い時点 $t_i (> t)$ における条件付き生存確率 $\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i | \mathcal{G}_t)$ が、 (V_t) の Markov 性および命題 2.1 から、以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
& \mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i | \mathcal{G}_t) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t\}} \mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [t, t_i]} V_s > K, \inf_{s \in [t, t_i] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}} \text{CET1R}_s > K_{\text{ACC}} | \mathcal{G}_t\right) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t\}} \mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [t, t_i]} V_s > K, \inf_{s \in [t, t_i] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}} V_s > K_{\text{ACC}}^V | V_t\right) \\
(2.15) \quad &= \mathbf{1}_{\{\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t\}} \mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [t, t_i]} X_s > \log \frac{K}{V_t}, \inf_{s \in [t, t_i] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}} X_s > \log \frac{K_{\text{ACC}}^V}{V_t} | V_t\right).
\end{aligned}$$

ただし、 $t \leq s$ に対して

$$(2.16) \quad X_s := \log \frac{V_s}{V_t} = \mu(s - t) + \sigma_V(W_s - W_t), \quad \mu := r - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2}$$

とおいている。

ここで、 $t < u$ とし、また $x < 0, y < 0$ として

$$(2.17) \quad F(t, u; x, y) := \mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [t, u]} X_s > x, \inf_{s \in [t, u] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}} X_s > y | X_t = 0\right)$$

とおくと、条件付き生存確率 $\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i | \mathcal{G}_t)$ の計算は

$$\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i | \mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t\}} F\left(t, t_i; \log \frac{K}{V_t}, \log \frac{K_{\text{ACC}}^V}{V_t}\right)$$

と表すことができることに注意する。

実際には、Appendix A で示すように、 $F(t, u; x, y)$ がドリフト付きブラウン運動の区間最小値に関する事象の計算であることに注意すれば、ある程度は解析的に計算を進めることが可能である。

しかしながら、後述する実証分析においては、必要なパラメータの値をすべて所与としてプライシングに必要な条件付き生存確率 $\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i | V_0)$ を計算することに専念すればよいということもあり、ナイーブなモンテカルロ・シミュレーションを用いることにする。具体的には、 V_0 を出発する資産価値過程 (V_t) のサンプルパスを多数生成し、その中で $\inf_{s \in [0, t_i]} V_s \leq K$ または $\inf_{s \in [t, t_i] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}} V_s \leq K_{\text{ACC}}^V$ の条件を満たしているパスの数を、生成したサンプルパス総数で割ることで、近似的に $\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} \leq t_i | V_0)$ をまず求めるという方法である。

ただし、実際の AT1 債の市場価格を用いてモデル・パラメータのキャリブレーションをするという場合には、モンテカルロ・シミュレーションの方法では困難であり、Appendix A 節で示す結果のように $F(t, u; x, y)$ について何らかの解析的な表現を得ておく必要があると考える。

2.1.6 不完全情報の定式化

Duffie and Lando [8] では、発行体の内部者（インサイダー）と投資家の間には情報の非対称性が存在していることが主張されている。両者の持つ情報の最も大きな違いは、発行体の内部者が自社の資産価値を正確に把握できるのに対し、投資家は発行体の資産価値に関する情報として会計情報を利用することができるが、会計情報には誤差やラグ等が存在しているため、資産価値そのものについて観測することができず「資産価値+何か」にて表現される「資産価値に関連した情報」を観測することができるに過ぎない、という点にあるとしている。

本論文では、発行体の資産価値、および資産価値を基にして算出される CET1 比率の情報が常に正確に把握できている状態、すなわちフィルトレーション \mathbb{G} を考えている状態を「完全情報」と呼称することとする。そして、完全情報の対となる概念として、発行体の資産価値、および資産価値を基にして算出される CET1 比率の情報をリアルタイムに正確に観測できない状態を「不完全情報」と呼称することとする。完全情報が発行体の内部者や発行体の監督当局に与えられている情報であるのに対し、不完全情報はアウトサイダーである投資家に与えられた情報であると解釈できる。

ここでは、以下のように不完全情報の概念を導入する。

$0 = u_0 < u_1 < u_2 < \dots$ となる離散的な確定時点の列 $\{u_j\}_{j=0,1,2,\dots}$ を考える。このとき、アウトサイダーである投資家は、各離散時点 u_j において、次でモデル化される「ノイズを含む資産価値」 \tilde{v}_{u_j} を観測すると仮定する。

$$(2.18) \quad \tilde{v}_{u_j} := K + (V_{u_j} - K)e^{-\sigma_{AN}\varepsilon_{u_j}} \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

ただし、 σ_{AN} は正の定数パラメータであり、 $\{\varepsilon_{u_j}\}_{j=0,1,2,\dots}$ は標準正規分布に従う独立な確率変数列とする。

ここで、不完全情報は「ノイズを含む資産価値」 \tilde{v}_{u_j} の観測に由来すると見なし、不完全情報を表すフィルトレーションとして $\mathbb{H}^{\text{Def}} = (\mathcal{H}_t^{\text{Def}})_{t \in [0, \infty)}$, $\mathbb{H}^{\text{Def,ACC}} = (\mathcal{H}_t^{\text{Def,ACC}})_{t \in [0, \infty)}$, $\mathbb{H}^{\text{ACC,PONV}} = (\mathcal{H}_t^{\text{ACC,PONV}})_{t \in [0, \infty)}$ の3種類を、それぞれ以下で定義する。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t^{\text{Def}} &:= \sigma\{\tilde{v}_{u_j}; u_j \leq t\} \vee \sigma\{\tau \wedge s; s \leq t\}, \\ \mathcal{H}_t^{\text{Def,ACC}} &:= \sigma\{\tilde{v}_{u_j}; u_j \leq t\} \vee \sigma\{\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} \wedge s; s \leq t\}, \\ \mathcal{H}_t^{\text{ACC,PONV}} &:= \sigma\{\tilde{v}_{u_j}; u_j \leq t\} \vee \sigma\{\theta_{\text{ACC}} \wedge \theta_{\text{PONV}} \wedge s; s \leq t\}. \end{aligned}$$

これにより、デフォルト時刻 τ は \mathbb{H}^{Def} -停止時刻、 $\tau \wedge \theta_{\text{ACC}}$ は $\mathbb{H}^{\text{Def,ACC}}$ -停止時刻、 $\theta_{\text{trigger}} := \theta_{\text{ACC}} \wedge \theta_{\text{PONV}}$ は $\mathbb{H}^{\text{ACC,PONV}}$ -停止時刻と仮定されることが分かる。

また、(2.18) 式は見方を変えると、各離散時点 u_j における発行体の資産価値の負債価値からの超過分 $V_{u_j} - K$ の $\mathcal{H}_{u_j}^\bullet$ (\bullet には “Def”, “Def,ACC”, “ACC,PONV” のいずれが入ってもよい) に関する条件付分布を、Frey et al. [9] で考えられているのと同様に、以下の対数

正規分布で与えていると見なすことができる。

$$(2.19) \quad V_{u_j} - K \sim LN(\log(\tilde{v}_{u_j} - K), \sigma_{AN}^2).$$

すなわち、何もイベントが発生していないとき、 $x \geq K$ に対して、

$$\mathbf{Q}(V_{u_j} \leq x | \mathcal{H}_{u_j}^{\bullet}) = \int_K^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{AN}^2}(y - K)} \exp\left(-\frac{(\log(y - K) - \log(\tilde{v}_{u_j} - K))^2}{2\sigma_{AN}^2}\right) dy$$

と仮定することになる。

この意味で、 σ_{AN} は真の資産価値 V_{u_j} と観測値 \tilde{v}_{u_j} の乖離の程度を測る何らかの「ノイズ」の大きさを表すパラメータと見なして、以後「会計情報ノイズ」と呼ぶことにする*1。

要するに、フィルトレーション \mathbb{H}^{\bullet} は、対象銀行の財務状況については（イベントが何も起こらない段階では）ノイズを含むという意味で不完全な情報であるが、デフォルトやトリガー抵触など対象とするイベントの発生時点は情報として即座に把握できることを仮定している。

これによって、上記のように導入した不完全情報下における、普通社債のモデル価格 $P_{t,T}^{\text{Def,Imp}}$ 、PONV トリガーのない AT1 債のモデル価格式 $P_{t,T}^{\text{Def,ACC,Imp}}$ 、PONV トリガーのある AT1 債のモデル価格式 $P_{t,T}^{\text{ACC,PONV,Imp}}$ はそれぞれ、(2.5), (2.7), (2.10) 式をもとに以下のように表される。

$$(2.20) \quad P_{t,T}^{\text{Def,Imp}} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{\{t \leq t_i\}} e^{-r(t_i-t)} c_i \mathbf{Q}(\tau > t_i | \mathcal{H}_t^{\text{Def}}) + \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} e^{-r(T-t)} N \mathbf{Q}(\tau > T | \mathcal{H}_t^{\text{Def}}),$$

$$(2.21) \quad P_{t,T}^{\text{Def,ACC,Imp}} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{\{t \leq t_i\}} e^{-r(t_i-t)} c_i \mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i | \mathcal{H}_t^{\text{Def,ACC}}) + \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} e^{-r(T-t)} N \mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > T | \mathcal{H}_t^{\text{Def,ACC}}),$$

$$(2.22) \quad P_{t,T}^{\text{ACC,PONV,Imp}} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{\{t \leq t_i\}} e^{-r(t_i-t)} c_i \mathbf{Q}(\theta_{\text{trigger}} > t_i | \mathcal{H}_t^{\text{ACC,PONV}}) + \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} e^{-r(T-t)} N \mathbf{Q}(\theta_{\text{trigger}} > T | \mathcal{H}_t^{\text{ACC,PONV}}).$$

(2.21) 式を例にとると、不完全情報の下における、ある t 時点における AT1 債の将来の利払い時点 $t' (> t)$ における条件付生存確率 $\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i | \mathcal{H}_t^{\text{Def,ACC}})$ は、Frey and Schmidt [10] を参考にして以下のように表すことができる。

*1 σ_{AN} は、会計としての「総資産」の値と真の資産価値の間に生じる「会計情報ノイズ」を反映しているだけでなく、決算時点と決算公表時点とのギャップから生じる「情報遅延ノイズ」も反映しうるものと考えられる。 σ_{AN} については、その解釈および適当な推定法を考える必要があるが、それについては今後の主要な研究課題としたい。

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i \mid \mathcal{H}_t^{\text{Def,ACC}}) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i \mid \mathcal{G}_t) \mid \mathcal{H}_t^{\text{Def,ACC}} \right] \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t\}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[F \left(t, t_i; \log \frac{K}{V_t}, \log \frac{K_{\text{ACC}}^V}{V_t} \right) \mid \mathcal{H}_t^{\text{Def,ACC}} \right] \\
(2.23) \quad &= \int_K^\infty F \left(t, t_i; \log \frac{K}{v}, \log \frac{K_{\text{ACC}}^V}{v} \right) \mathbf{Q}(V_t \in dv \mid \mathcal{H}_t^{\text{Def,ACC}}).
\end{aligned}$$

(2.23) 式を評価する場合は、(2.17) の計算も必要であるが、資産価値過程 (V_t) が $\mathbb{H}^{\text{Def,ACC}}$ -適合ではないため、 $\mathcal{H}_t^{\text{Def,ACC}}$ に関する V_t の条件付分布が必要となり、結局

$$\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i \mid \mathcal{H}_t^{\text{Def,ACC}}) = \int_K^\infty F \left(t, t_i; \log \frac{K}{v}, \log \frac{K_{\text{ACC}}^V}{v} \right) \mathbf{Q}(V_t \in dv \mid \mathcal{H}_t^{\text{Def,ACC}})$$

という形の計算をおこなうことになる。 $t \in \{u_j\}$ のときは、(2.19) でも見たように、

$\mathbf{Q}(V_t \in dv \mid \mathcal{H}_t^{\text{Def,ACC}})$ の部分を対数正規分布に帰着させることができる。 $t \notin \{u_j\}$ に対しては追加的な仮定が必要となるが、後の分析では、AT1 債の価格評価などは $t \in \{u_j\}$ の場合だけに行うこととし、一般の時点 t に対する仮定は割愛する。

なお、不完全情報の下では、真に資産価値 V_t について、 $V_t > K$ は満たされるが $V_t > K_{\text{PONV}}$ は必ずしも満たされず、 $V_t \leq K_{\text{PONV}}$ のときは、結果的に $\theta_{\text{PONV}} = t$ として扱われることに注意する。

また、 $t \in \mathcal{T}_{\text{qtr}}$ のとき $V_t \leq K_{\text{ACC}}^V$ であれば、(2.13)、(2.14) より時点 t においてすでに財務トリガーに抵触していることを意味するので、 $\theta_{\text{ACC}} = t$ として扱われることに注意する。

2.2 具体的な分析モデル

2.2.1 パラメータ推定：資産価値のボラティリティ

McNeil et al. [14] によれば、ある時点における CDS 契約に対する CDS スプレッドは、その契約の価値がゼロに等しくなるように決定される。このように決定された CDS スプレッドを「フェア (Fair) な」CDS スプレッドという。本論文では、市場で取引されている CDS スプレッドがフェアであるという仮定から、資産価値のボラティリティを推定することを試みる。

CDS 契約によって、CDS の買い手（プロテクション・バイヤー）は CDS 契約における参照組織がデフォルト等、一定の要件（クレジットイベント）に抵触していない限り、CDS の売り手（プロテクション・セラー）に対して定期的に CDS 保証料（CDS プレミアム）を支払う。このキャッシュフローを「プレミアムレグ (premium legs)」という。一方で、参照組織がクレジットイベントに抵触した場合、CDS の売り手は CDS の買い手に対し損失を補填する。このキャッシュフローを「デフォルトレグ (default leg)」という。

参照組織の資産価値の情報が完全に観測可能である完全情報の下で、CDS の価格はデフォルトレグの現在価値とプレミアムレグの現在価値の差によって決定される。フェアな CDS スプレッドによって締結された CDS 契約の価値はゼロであることから、フェアな CDS スプレッドはデフォルトレグの現在価値とプレミアムレグの現在価値が等しくなるように決定されることになる。

フェアな CDS スプレッドを算出するにあたっては、参照組織のデフォルト確率等を考慮したデフォルトレグとプレミアムレグの現在価値を算出する必要がある。参照組織のデフォルト確率は、CDS の参照組織の資産価値が一定期間までに事前に定めた閾値を下回る確率として表現可能である。これは、先に述べた初期到達時刻モデルである。

Karatzas and Shreve [11] や Rösler [16] によると、一般に $\mu_Y \in \mathbb{R}, \sigma_Y > 0$ として、 $t \geq 0$ に対して

$$(2.24) \quad Y_t = \mu_Y t + \sigma_Y W_t$$

で定義される原点を出発するドリフト付きのブラウン運動 (Y_t) の閾値 $b (< 0)$ への初到達時刻 $\tau_b := \inf\{t > 0 \mid Y_t \leq b\}$ の密度関数を $\varphi(t; b, \mu_Y, \sigma_Y)$ とおくと

$$(2.25) \quad \varphi(t; b, \mu_Y, \sigma_Y) = \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}} \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3} \sigma_Y} \exp\left(-\frac{(b - \mu_Y t)^2}{2\sigma_Y^2 t}\right)$$

で与えられることが知られている。

リスク中立確率測度 Q の下で、参照組織の資産価値過程 (V_t) が幾何ブラウン運動に従っており、

$$(2.26) \quad \log(V_t) = \log(V_0) + \mu t + \sigma_V W_t, \quad \mu := r - \delta - \frac{1}{2}\sigma_V^2$$

と表されることから、デフォルト時刻 τ は

$$\begin{aligned} \tau &= \inf\{t > 0 \mid V_t \leq K\} = \inf\{t > 0 \mid \log(V_t) \leq \log(K)\} \\ &= \inf\left\{t > 0 \mid \mu t + \sigma_V W_t \leq \log \frac{K}{V_0}\right\} \end{aligned}$$

と表すことができる。

したがって、上述した結果を用いるとデフォルト時刻 τ の $V_0 = v$ としたときの条件付き密度関数は $\varphi\left(t; \log \frac{K}{v}, \mu, \sigma_V\right)$ と表すことができることに注意する。

この条件付き密度関数を用いることで、完全情報の下における、固定の CDS プレミアムを η とする CDS のプレミアムレグの現在価値 $\text{PREM}_0(\eta, v, K)$ は、以下のように与えられる (Karatzas and Shreve [11], McNeil et al. [14], Rösler [16] を参照)。なお、想定元本は 1 とする。

$$\begin{aligned}
\text{PREM}_0(\eta, v, K) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[\sum_{i=1}^{\ell} \eta(t_i - t_{i-1}) e^{-rt_i} \mathbf{1}_{\{t_i < \tau\}} \mid V_0 = v \right] \\
(2.27) \quad &= \eta \sum_{i=1}^{\ell} (t_i - t_{i-1}) e^{-rt_i} \left\{ 1 - \int_0^{t_i} \varphi\left(s; \log\left(\frac{K}{v}\right), \mu, \sigma_V\right) ds \right\}.
\end{aligned}$$

ここで、 ℓ は時点 $t = 0$ から債券の参照組織のデフォルト時点 τ までの CDS プレミアムの支払回数、 t_i は i 回目のプレミアム支払時点を表している。

一方、デフォルトレグの現在価値 $\text{DEF}_0(v, K)$ は以下のように定義される。

$$\begin{aligned}
\text{DEF}_0(v, K) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [e^{-r\tau} (1 - \text{LGD}) \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mid V_0 = v] \\
(2.28) \quad &= (1 - \text{LGD}) \int_0^T e^{-rs} \varphi\left(s; \log\left(\frac{K}{v}\right), \mu, \sigma_V\right) ds.
\end{aligned}$$

ここで、 $\text{LGD} \in [0, 1]$ はデフォルト時の（想定元本に対する）損失率を表す定数とする。したがって $1 - \text{LGD}$ は CDS のクレジットイベント後の回収率と見なされる。

時点 $t = 0$ におけるフェアな CDS スプレッド η^* は、 $\text{PREM}_0(\eta, v, K) = \text{DEF}_0(v, K)$ となるような CDS スプレッドであり、(2.27), (2.28) 式から以下のように表すことができる。

$$(2.29) \quad \eta^* = \frac{(1 - \text{LGD}) \int_0^T e^{-rs} \varphi\left(s; \log\left(\frac{K}{v}\right), \mu, \sigma_V\right) ds}{\sum_{i=1}^{\ell} (t_i - t_{i-1}) e^{-rt_i} \left\{ 1 - \int_0^{t_i} \varphi\left(s; \log\left(\frac{K}{v}\right), \mu, \sigma_V\right) ds \right\}}.$$

このようにして、フェアな CDS スプレッド、及び初期到達時刻モデルから導出した条件付密度関数の前提から、市場で観測した CDS スプレッドを (2.29) 式の η^* に代入することで、資産価値のボラティリティ σ_V を逆算して求めることが可能となる。

本論文では (2.29) 式について、 $v = V^{\text{book}}, K = K^{\text{book}}$ として、資産価値のボラティリティ σ_V の推定をおこなう。ただし、 $V^{\text{book}}, K^{\text{book}}$ はそれぞれ、CDS 発行時に直近の発行体の財務諸表から得られる会計上の総資産簿価と総負債簿価とする。

2.2.2 パラメータ推定：CET1 比率と資産価値の関係式

(2.11) 式にて、CET1 比率と資産価値の関係式を定義した。関係式のうち、推定が必要なパラメータは c_1, c_2 である。

パラメータ推定にあたり、本論文では最小二乗法を採用している。パラメータ推定のため、(2.11) 式を線形回帰式とみなして以下の様に別途定義することとする。

$$(2.30) \quad \log(\text{CET1R}_t^{\text{book}}) = c_1 + c_2 \log\left(\frac{V_t^{\text{book}} - K_t^{\text{book}}}{\text{RWAS}_t^{\text{book}}}\right) + \kappa_t.$$

ここで、 $V_t^{\text{book}}, K_t^{\text{book}}, \text{CET1R}_t^{\text{book}}, \text{RWAs}_t^{\text{book}}$ は、それぞれ t 時点における観測可能な簿価ベースの発行体の総資産、総負債、CET1 比率、リスクアセット額とする。また、誤差項 κ_t は正規分布 $N(0, \sigma_\kappa^2)$ に従うとする。

なお Rösler [16] では、II から III の移行に際して規制のフレームワークが変化したことから、CET1 比率の定義が劇的に変化し、2013 年の第 4 四半期より前に計算された CET1 比率は、それ以後に計算された CET1 比率と比較することができないため、2013 年第 4 四半期からのバランスシートの数値のみを考慮して当該関係式のパラメータ推定をおこなっている、との記載がある。

当該記載は、バーゼル III 基準における自己資本の開示要件を定めた BCBS [2] における、「各国の当局は、2013 年 6 月 30 日までに本書に記載された開示要件を適用する。銀行は、2013 年 6 月 30 日以降、貸借対照表に関する最初の財務諸表の公表日から開示要件を遵守することを要求される*1」との記載と整合的であると考えられる。

本論文においては Rösler [16] の手法に倣い、2013 年第 4 四半期（3 月決算であれば 2014 年 3 月期第 3 四半期）より前の財務データについては、CET1 比率と資産価値の関係式のパラメータ推定に際して使用しないこととしている。

2.2.3 条件付確率の算出：モンテカルロ・シミュレーションのアルゴリズム

債券のプライシング式から実際にモデル価格を算出するためには、債券の条件付生存確率を算出する必要がある。債券の条件付生存確率を求める方法としては、大きく分けて (1) 解析的に求める方法 (2) 数値的に求める方法の二つを挙げることができる。本論文では、(2) の代表的な手法であるモンテカルロ・シミュレーションを用いて債券の条件付生存確率を算出することとする。

モンテカルロ・シミュレーションのアルゴリズムは、Frey et al. [9] を参考にしている。(2.7) 式の完全情報の下でのモデル価格 $P_{0,T}^{\text{Def,ACC}}$ または (2.21) 式の不完全情報の下でのモデル価格 $P_{0,T}^{\text{Def,ACC,Imp}}$ を例にとる。以下の手順でシミュレーションを実施し、AT1 債のモデル価格に含まれる条件付生存確率を算出する。ただし、価格を計算する時点を常に 0 と設定し、 T を満期（正確には「初回償還可能日」）までの残存期間と見なすことに注意する。

なお、発行体の四半期決算時点の離散時刻集合に関しては $\mathcal{T}_{\text{qtr}} = \{0.25, 0.5, 0.75, 1, \dots\}$ (\mathcal{T}_{qtr} の定義式で $t_0 = 0$ とおく) としてシミュレーションをおこなう*2。

*1 BCBS [2] 内にて、“National authorities will give effect to the disclosure requirements set out in this document by no later than 30 June 2013. Banks will be required to comply with the disclosure requirements from the date of publication of their first set of financial statements relating to a balance sheet date on or after 30 June 2013 (with the exception of the Post 1 January 2018 template set out in Section 1).”との記載がある。

*2 このように扱う理由としては、年 4 回ある連結 CET1 比率の条件抵触の判断タイミングが実際は明確でないため、その判断時点を厳密に扱おうとするとかえって恣意性が含まれることになるので、それよりはシンプルに Rösler [16] が与えた価格式と整合させて計算する方がよいと考えたからである。

- (1) 適当な時間刻み幅 $\Delta > 0$ を与えて、観測する時点集合を $u_j = j\Delta$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) で与える*³。残存期間を $T = J\Delta$ とする。(2.3) 式を離散化して、資産価値過程 (V_t) の $M(\in \mathbb{M})$ 本のサンプルパス $(V_{j\Delta}^{(i)})_{i=1, \dots, M; j=0, \dots, J}$ を発生させる。その際の各サンプルパスの初期値 $V_0^{(i)}$ は以下のように定める。
- 完全情報 \mathcal{G}_0 の下でのモデル価格 $P_{0,T}^{\text{Def,ACC}}$ に対しては、観測された \tilde{v}_0 を真の値と見なして $V_0^{(i)} = \tilde{v}_0$ と設定する。
 - 不完全情報 $\mathcal{H}_0^{\text{Def,ACC}}$ の下でのモデル価格 $P_{0,T}^{\text{Def,ACC,Imp}}$ に対しては、(2.19) 式の仮定に沿って、その時点で観測された資産価値 \tilde{v}_0 をパラメータに含む対数正規分布 $LN(\log(\tilde{v}_0 - K), \sigma_{AN}^2)$ に従うランダムサンプル $V_0^{(i)} - K$ を生成して、初期値 $V_0^{(i)}$ を設定する。
- (2) 資産価値過程のサンプルパス $(V_{j\Delta}^{(i)})$ に対応したデフォルト時刻 $\tau^{(i)}$ および財務トリガー抵触時刻 $\theta_{\text{ACC}}^{(i)}$ を求め、サンプルパスごとの債券消滅過程 $(\mathbf{1}_{\{\tau^{(i)} \wedge \theta_{\text{ACC}}^{(i)} \leq j\Delta\}})$ を生成する。
- (3) 任意の $\forall j = 0, 1, \dots, J$ に対して、 $j\Delta$ 時点における条件付き生存確率、すなわち(2.17) 式に相当する $F\left(0, j\Delta; \log \frac{K}{\tilde{v}_0}, \frac{K_{\text{ACC}}^V}{\tilde{v}_0}\right)$ (完全情報)あるいは(2.23) 式に相当する $\mathbf{E}^Q \left[F\left(0, j\Delta; \log \frac{K}{V_0}, \frac{K_{\text{ACC}}^V}{V_0}\right) \mid \tilde{v}_0 \right]$ (不完全情報) を $1 - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{1}_{\{\tau^{(i)} \wedge \theta_{\text{ACC}}^{(i)} \leq j\Delta\}}$ で近似する。

3. 実証分析の方法

1 節で述べたように、本論文のモチベーションは「財務トリガーや PONV トリガーへの抵触条件を適切に定式化」し、「発行体の資産価値に対する不完全情報」の存在を前提とした、AT1 債の新たなプライシングモデルを提案し、「プライシングモデルに基づく理論価格と実際の AT1 債の市場価格を実証分析を通じて比較して、本論文で提案するプライシングモデルの有用性について検討する」ことである。

本節ではまず、実証分析とする対象銘柄、および実証分析の方法とプライシングモデルの設定条件について説明する。

3.1 分析対象銘柄とその概要

本論文では、日本と欧州二つの AT1 債を採り上げた実証分析をおこなう。ここでは、AT1 債に関連した事項を中心に、発行体と AT1 債の概要について簡潔に触れておくことにする。

*³ 四半期決算発表タイミングを想定した離散時刻集合 \mathcal{T}_{qtr} の任意の時点 s に対して、 $(j-1)\Delta < s \leq j\Delta$ ならば s を $j\Delta$ に対応させる。

三菱 UFJ フィナンシャルグループ (日本)

バーゼル III の段階的施行に伴い、国際的に活動する銀行を中核企業とした邦銀フィナンシャルグループにおいても、規制上の自己資本の充実を目的として AT1 債の発行を積極的に進めている。

実証分析の対象として採り上げるのは、三菱 UFJ フィナンシャルグループ（以降、MUFG）が 2015 年 3 月に発行した AT1 債である。当該 AT1 債は、MUFG にとって初の AT1 債の発行となった。

なお、後述する実証分析において、同社のリスクアセット額および CET1 比率の数値については同社ホームページに公表されている「バーゼル III 関連データ」記載の数値を用いているが、同社は 2016 年 1 月 20 日公表のニュースリリースにて自己資本比率等に係る数値につき修正を実施している*1。実証分析では、当該ニュースリリースによって修正がなされた数値について、修正後の数値を採用している。

バンコ・ポプラール・エスパニョール (スペイン)

バンコ・ポプラール・エスパニョール（以降、バンコ・ポプラール）は、スペインに本社を置く中堅銀行である。2000 年代後半に発生した世界的な金融危機以降、不動産融資の大規模な焦げ付きに伴い多額の引当金を計上してきたこと*2等からかねてより経営不安が囁かれていたが、ついに 2017 年 6 月 6 日、ECB（the European Central Bank, ヨーロッパ中央銀行）から「破綻、または破綻の恐れがある（“failing or likely to fail”）」との決定通知が SRB（the Single Resolution Board, 単一破綻処理委員会）になされた。SRB は当該通知を受け、その翌日である 2017 年 6 月 7 日にバンコ・ポプラールに対する破綻処理を実施することとなった。

SRB が 2017 年 6 月 7 日に公表した “Notice summarising the effects of the resolution action taken in respect of Banco Popular Español pursuant to Article 29(5) SRMR” によると、バンコ・ポプラールに対する破綻処理の概要は次の三点である：(1) バンコ・ポプラールのバンコ・サンタンデルへの譲渡 (2) バンコ・ポプラールの実質的な債務超過に対応するため、バンコ・ポプラールの CET1 資本に対応する普通株式、および AT1 資本に対応する AT1 証券を全額元本削減 (“written down”) (3) Tier2 資本に対応する Tier2 証券を株式に転換し、バンコ・サンタンデルに 1 ユーロの価格で譲渡。

上記 (1) ないし (3) の内容を鑑みるに、金融機関の破綻処理に際して、最初に内部利害関係者である株主・債権者が損失を被る「バイルイン」によって破綻処理がなされたこと、さらに AT1 債（および B3T2 債）が破綻に伴う損失を吸収する役割を果たしたことがうかがえる。また、債権者の中でもシニア債務である普通社債や預金に関してはバイルイン

*1 参考 URL https://www.mufg.jp/dam/pressrelease/2016/pdf/pressrelease-20160120-001_ja.pdf

*2 ロイターの 2012 年 5 月 14 日記事など、バンコ・ポプラールの経営不振を報じた記事は相応に存在する。

の対象とならなかったことについても注目すべきところだろう。ロイターの2017年6月7日記事では、バンコ・サンタンデルがバンコ・ポプラール買収に際し約70億ユーロの増資をおこなうと発表したことを報じている。

バンコ・ポプラールが発行していたAT1債は、ブルームバーグ上で確認できる限り2013年10月発行と2015年2月発行の計2本が存在しており、固定金利期間中のクーポンはそれぞれ年率11.5%、8.25%とかなりの高水準であったことがうかがえる。実証分析では、2015年2月発行のAT1債を実証研究の対象として採り上げる。

なお、バンコ・ポプラールの財務データについてはバンコ・ポプラールのHPに掲載されている四半期決算報告(Quarterly Reports)から採取する。しかしながら、後述する決算の下方修正の他にも、当初発表された決算数値とその後の四半期決算報告にて再掲される決算数値に齟齬がみられる等、以前から投資家に提示している会計情報の正確性について問題があったものとみられる。そこで各種パラメータの推定に際し、財務データは「最も直近の四半期決算報告にて報告されている数値」を採用する。

また、当該事象を鑑み、バンコ・ポプラールについて不完全情報の下でプライシングを実施する際には、(2.19)式で述べたように資産価値 V_0 の条件付分布として対数正規分布を仮定する。そのパラメータである会計情報ノイズ σ_{AN} については、バンコ・ポプラールが最終的にベイルインに至ったことを考慮し、MUFGよりも高い値を設定する。以降、本論文内では、実証分析にて用いるMUFGのAT1債の銘柄を「MUFG_AT1債」、バンコ・ポプラールのAT1債の銘柄を「POP_AT1債」と呼称することとする。それぞれのAT1債の契約条件の概要は、Table 1の通りである。

Table 1. Outline of Additional Tier 1 bonds issued by Mitsubishi UFJ Financial Group (MUFG) and Banco Popular Español (POP).

Issuer	Mitsubishi UFJ Financial Group (MUFG)	Banco Popular Español (POP)
ISIN code	JP390290AFF7	XS1189104356
Issue amount	100 billion JPY	750 million EUR
Date of issue	March 23, 2015	February 12, 2015
Maturity	Perpetual	Perpetual
First call date	July 15, 2020	April 10, 2020
Coupon frequency	Semi-annually	Quarterly
Coupon rate	Fix-to-float: 2.700% until July 15, 2020, then 6M JPY LIBOR + 2.400%	Fix-to-float: 8.250% until April 10, 2020, then 5Y EUR Swap Rate + 8.179%
Accounting Trigger	CET1 Ratio: 5.125%	CET1 Ratio: 7.000%
PONV Trigger	Yes	Yes
Coupon cancellation	Yes	Yes

実証分析の対象期間

MUFG_AT1 債については、2015 年 12 月 9 日から 2017 年 9 月 29 日までの期間を分析期間として設定した。当該期間を分析期間として設定した理由は、ブルームバーグにて MUFG_AT1 債の市場価格が 2015 年 12 月 9 日から入手可能だったことによる。

POP_AT1 債については、2016 年 6 月 1 日から 2017 年 6 月 6 日までの期間を分析期間として設定した。当該期間を分析期間として設定した理由は、2017 年 6 月 6 日に ECB によってバンコ・ポプラーの事実上の破綻決定がなされるまでの約 1 年間の AT1 債の挙動について分析をおこなうためである。

なお、いずれの債券の分析においても、プライシングモデルにインプットするデータに欠損があった営業日については、モデル価格の算出をおこなっていない。

3.2 モンテカルロ・シミュレーションの概要

モデル価格を算出する際に必要となる債券の条件付生存確率を算出するにあたって、本論文の実証分析ではモンテカルロ・シミュレーションの手法を用いている。モンテカルロ・シミュレーションは、2.2.3 項にて記載した手順に沿って実行している。今回は、資産価値過程 (V_t) のサンプルパスおよび対応する CET1 比率過程 ($CET1R_t$) をともに 25,000 本発生させて債券の条件付生存確率を算出している。ソフトウェアは R を使用した。

3.3 パラメータの設定

本論文の AT1 債プライシングモデルから価格を算出するにあたり必要なパラメータとその概要は以下の通りである。なお、価格を計算する時点は常に 0 と設定していたことに注意する。

データの出所は、各発行体の IR 資料やブルームバーグである。

市場データ・財務データから決めるパラメータ

- リスクフリーレート (r) : MUFG_AT1 債に対しては「円建て 5 年 OIS レート」を、POP_AT1 債に対しては「ユーロ建て 5 年 OIS レート」をそれぞれ使用。日次で更新
- CDS スプレッド (η) : MUFG_AT1 債に対しては「発行体のグループ内商業銀行である三菱東京 UFJ 銀行（現：三菱 UFJ 銀行）の 5 年シニア CDS スプレッド*¹」を、POP_AT1 債に対しては「発行体の 5 年シニア CDS スプレッド」をそれぞれ使用。日次で更新

*¹ 当該 CDS スプレッドは USD 建のため、日本営業日の前営業日のデータを対応させている。

- 資産価値の外部流出率 (δ) : 「一株あたり配当額^{*2} × 発行済株式総数 / 発行体の直近の連結財務諸表の総資産簿価^{*3} (V^{book})」. いずれかの値が更新されるたびに更新
- 資産価値の初期値の観測値 (\tilde{v}_0) : 「発行体の直近の連結財務諸表の総資産簿価 (V^{book})」. 四半期ごと更新
- 負債価値 (K) : 「発行体の直近の連結財務諸表の総負債簿価 (K^{book})」. 四半期ごと更新
- CET1 比率 (CET1R_0) : 「発行体公表の直近のバーゼル III 関連資料に記載の連結 CET1 比率 ($\text{CET1R}^{\text{book}}$)」. 四半期ごと更新
- リスクウェイト (β) : 「発行体公表の直近のバーゼル III 関連資料に記載のリスクアセット額 ($\text{RWA}^{\text{book}}/V^{\text{book}}$)」. 四半期ごと更新

キャリブレーションで求めるパラメータ

- 資産価値のボラティリティ (σ_V) : 2.2.1 項で示した CDS スプレッドの理論式 (2.29) において, $v = V^{\text{book}}, K = K^{\text{book}}$ として, 発行時点で観測される CDS スプレッドを代入してインプライドに推定. 日次で更新
- CET1 比率と資産価値の関係式のパラメータ (c_1, c_2) : 2.2.2 項で述べたように, それぞれの発行体について線形回帰式 (2.30) を最小二乗法で推定.
ただし, 分析時点におけるサンプル数が少なかったため, 今回は MUFG については 2017 年 6 月末 (2017 年度第 1 四半期), バンコ・ポプラールについては 2017 年 3 月末 (2017 年第 1 四半期) までのすべての有効な財務データ (発行体の総資産簿価・総負債簿価, CET1 比率, リスクアセット額) を使用して推定した. そのため, 4 節における「財務トリガー」を含むモデル価格は, c_1, c_2 に関して, 各評価日よりも将来の情報を用いて得た推定値を利用して算出したものであることとお断りしておく.

推定結果は次の通り^{*1}.

- MUFG_AT1 債 : $c_1 = -1.05$ (t 値 -1.88), $c_2 = 0.60$ (t 値 2.03). Adjusted R^2 は 0.194
- POP_AT1 債 : $c_1 = -0.70$ (t 値 -1.44), $c_2 = 0.78$ (t 値 2.92). Adjusted R^2 は 0.366

^{*2} バンコ・ポプラールは 2016 年以降無配当であったため, 2015 年度の DPS=0.04 ユーロを用いた.

^{*3} 四半期の財務データ更新基準として, 三菱 UFJ フィナンシャルグループは同社ホームページなどから把握できる「決算短信」の発表と「自己資本比率について」の発表のいずれか遅い方の日付, バンコ・ポプラールは四半期決算月の翌々月初をデータ更新日とした.

^{*1} 両者とも, 係数 c_1 の t 値や自由度修正済み決定係数 (Adjusted R^2) が十分高いとは言えないものの, 本論文での実証研究ではこの推定結果を用いている. 推定に用いた各銀行の資産と負債の簿価の与え方の問題もあるかもしれないし, (2.11) のような CET1 比率と資産価値の関係式がナイーブすぎる可能性も考えられる. 規制自己資本比率のモデル化は今後の課題であり, 説明変数を追加したり, 別の形の関係式を提案することも今後考えたい.

モデル設定者が任意に定めるパラメータ

- 資産価値過程および CET1 比率過程を離散化する際の時間刻み幅 (Δ): MUFG_AT1 債に対しては $\frac{1}{244}$ を, POP_AT1 債に対しては $\frac{1}{252}$ をそれぞれ使用
- CDS のクレジットイベント後回収率 ($1 - \text{LGD}$): 50% (Rösler [16] と同様)
- 財務トリガー閾値 (K_{ACC}): 財務データから求めた負債価値 K , リスクウェイト β , および上記で推定された係数 c_1, c_2 を代入した (2.12) の関係式において, MUFG_AT1 債に対しては「CET1 比率 5.125%」を, POP_AT1 債に対しては「CET1 比率 7.000%」をそれぞれ使用したときに逆算される「資産価値水準 V_t 」を K_{ACC} と設定
- PONV トリガー閾値 (K_{PONV}): 財務トリガー閾値を求めたときと同じ (2.12) の関係式において, 「CET1 比率 4.5%」を使用したときに逆算される「資産価値水準 V_t 」を K_{PONV} と設定. すなわち, バーゼル III 基準における CET1 比率の最低要求水準である「4.5%」を下回っていないか否かを, 発行体の監督当局が常に観察していると仮定
- 会計情報ノイズ (σ_{AN}): いろいろな値を与えて計算. ただし 4.2 項では, MUFG_AT1 債に対しては「10%」を, POP_AT1 債に対しては「25% または 50%」の場合の結果のみを示す (理由は後述).

4. 実証分析の結果

本節では, 2 節にて設定した AT1 債プライシングモデルを用い, 3 節で具体的に示した方法に沿って, 日本と欧州で実際に発行された二つの AT1 債のモデル価格を算出し, その特徴について考察を加える.

4.1 市場価格と完全情報モデル価格との比較

Fig. 1 は, 市場価格および 2.1.6 項でまとめたモデル価格のうち完全情報下の 3 つを用いて算出したモデル価格の日次での推移表示したグラフである. 完全情報の下で算出されたモデル価格間の比較では, $P_{i,T}^{\text{Def}}$ と $P_{i,T}^{\text{Def,ACC}}$ のモデル価格の差は普通社債のプライシングモデルに対し追加的に財務トリガー抵触時刻を導入した場合の効果であり, $P_{i,T}^{\text{Def,ACC}}$ と $P_{i,T}^{\text{ACC,PONV}}$ のモデル価格の差は, 本論文で新たに設定した PONV トリガー抵触時刻を追加的に導入した場合の効果であると捉えることができる.

普通社債のモデル価格 $P_{i,T}^{\text{Def}}$ と AT1 債のモデル価格 $P_{i,T}^{\text{Def,ACC}}$, $P_{i,T}^{\text{ACC,PONV}}$ の差異は大きく, AT1 債の有する強制元本削減トリガー条項が AT1 債の条件付消滅確率を高め, AT1 債のモデル価格を大きく引き下げる効果をもたらしていることがわかる. また, モデル価格の水準に加え, モデル価格の変動具合や推移の様態についても差異があることが示唆さ

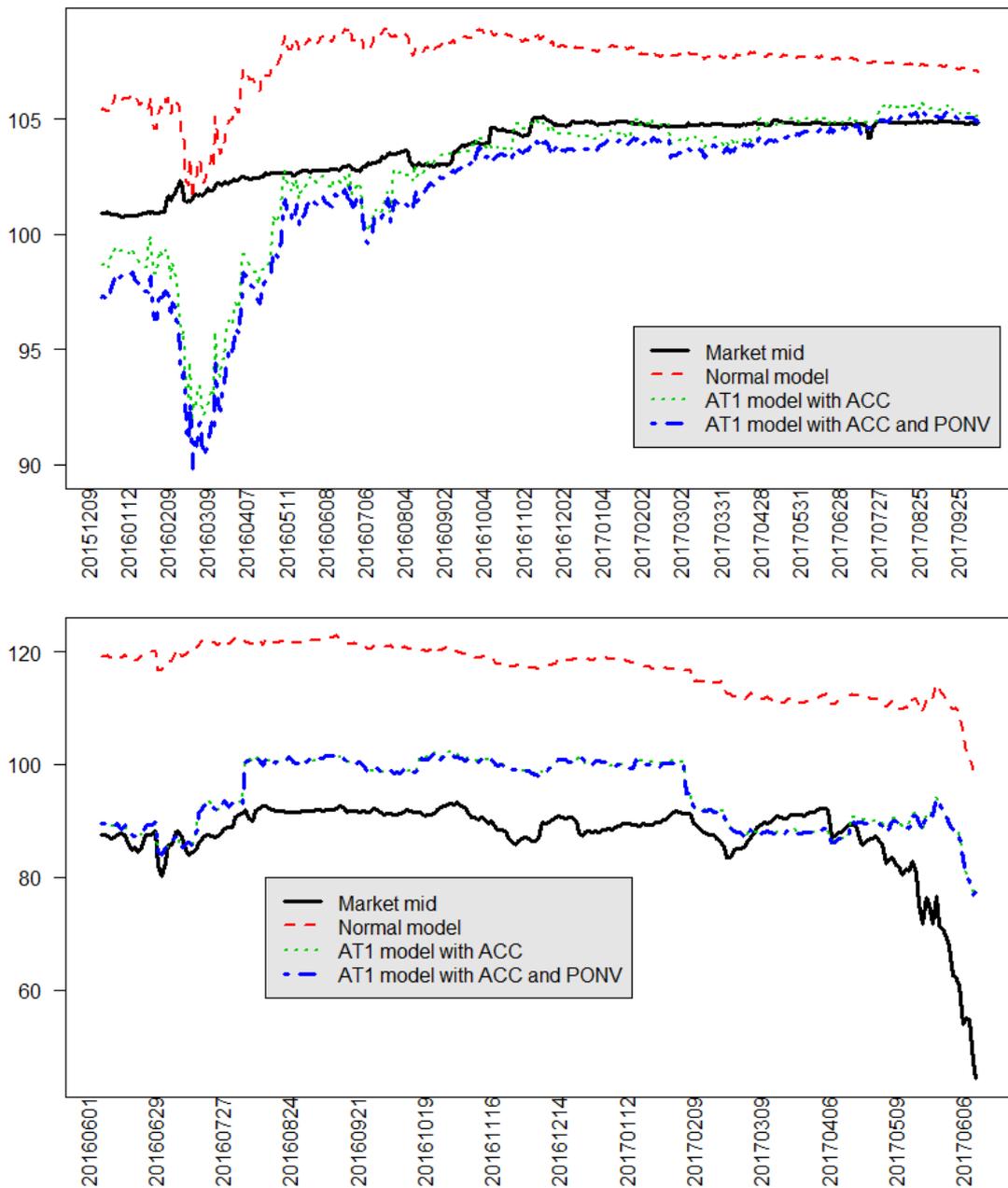


Fig. 1. Daily changes of the market mid price and some model prices under complete information of the underlying AT1 bond (top: MUFG_AT1, bottom: POP_AT1). The solid line: the market mid price of the underlying AT1 bond. The dash line: the model price $P_{i,T}^{\text{Def}}$ calculated from the normal corporate bond model under complete information. The dotted line: the model price $P_{i,T}^{\text{Def,ACC}}$ from the AT1 bond pricing model with only accounting trigger. The dotted broken line: the model price $P_{i,T}^{\text{ACC,PONV}}$ from the AT1 bond pricing model with both accounting and PONV triggers. Remark that the curves of $P_{i,T}^{\text{Def,ACC}}$ and $P_{i,T}^{\text{ACC,PONV}}$ almost overlap for POP_AT1 bond.

れる結果が得られた。

また、 $P_{i,T}^{\text{Def,ACC}}$ と $P_{i,T}^{\text{ACC,PONV}}$ のモデル価格の差を通して、MUFG_AT1 債と POP_AT1 債の PONV トリガー抵触時刻の導入による効果を比較すると、MUFG_AT1 債は PONV トリガー抵触時刻の導入によりモデル価格がさらに下落しているのに対し、POP_AT1 債については PONV トリガー抵触時刻の導入の効果がほとんど見られなかったことが確認できる。これは、本論文における PONV トリガー閾値 K_{PONV} を MUFG_AT1 債、POP_AT1 債ともに CET1 比率 4.500% に設定しているところ、財務トリガー閾値 K_{ACC} は MUFG_AT1 債が 5.125%、POP_AT1 債が 7.000% と、POP_AT1 債の方が財務トリガー閾値と PONV トリガー閾値との乖離が大きく、AT1 債の条件付消滅確率の算出において、離散時間で設定された財務トリガーの影響がより強く反映されたことによるものと考えられる。

MUFG_AT1 債のモデル価格である $P_{i,T}^{\text{Def,ACC}}$ 、 $P_{i,T}^{\text{ACC,PONV}}$ と市場価格の推移を比較すると、2016 年 2 月～3 月頃にモデル価格と市場価格との間に大きな乖離が生じていることが分かる。当該要因は、モデルのパラメータとして用いていた三菱東京 UFJ 銀行（現：三菱 UFJ 銀行）の CDS スプレッドが急上昇したことに伴い、モデル価格が著しく押し下げられたことによるものである。ロイターの 2016 年 2 月 15 日付記事では、「前週には一部欧州銀の経営への不安が高まる*1なか、思惑先行的にマイナス金利による邦銀の収益圧迫という懸念が高まってしまった」と報じており、当該事象が一時的に CDS スプレッドを上昇させる一因となっていたことがうかがえる。

しかし、それ以外の期間については、MUFG_AT1 債のモデル価格が市場価格の推移に対してある程度整合的に算出されていることが分かる。当該結果は、あくまでも分析期間内においての話であるが、市場価格の挙動のかなり多くの部分を、本論文のプライシングモデルにて織り込んだ AT1 債の信用リスクで説明できる可能性があることを示唆していると考えられる。

一方で、POP_AT1 債については、2017 年 2 月下旬以降、一時的に市場価格がモデル価格を上回る形で乖離した期間があったことが確認できる。モデル価格については、2016 年度決算が発表当初、最終赤字は約 34 億 85 百万ユーロ、グループ連結 CET1 比率も 2016 年度第 3 四半期の 15.29% から 12.12% へと低下したことが報告されたことから、当該状況が反映された各種パラメータ等の推移により、比較的低水準のモデル価格が算出されたものとみられる。したがって、当該期間の市場価格の上昇は AT1 債の信用リスクでは説明が難しい要因によってもたらされた可能性が示唆されたと考える。

その後、バンコ・ポプラーは 2017 年 4 月 3 日に CNMV（スペイン証券市場委員会）に提出した監査済年次決算報告書の追加情報を反映して決算情報の修正をおこなった*2。その結果、2016 年度の最終赤字は約 34 億 85 百万ユーロから約 36 億 11 百万ユーロへ、グループ連結 CET1 比率は 12.12% から 11.53% へと下方修正がなされた。POP_AT1 債

*1 ドイツ銀行の AT1 債利払い懸念に関しては、別途ロイターの 2016 年 2 月 12 日付記事にて詳述されている。

*2 詳細は Banco Popular - 1st Quarter 2017 Quarterly Reports に記載されている。

の市場価格が 2017 年 4 月上旬以降徐々に低下する推移をみせているのは、発行体の決算情報の正確性、および決算下方修正の事実を懸念した投資家が AT1 債を売却しようとする行動に出た可能性が要因の一つとして考えられる。

POP_AT1 債の市場価格は、2017 年の 5 月中旬には本論文のモデル価格を完全に下回る推移をみせることとなった。その後一時もつれる場面もみられたものの、最終的には大きく下落に転じ、2017 年 6 月のペイルインを迎える結果となった。ブルームバーグの 2017 年 5 月 20 日付記事においては「(2017 年 5 月) 16 日にエスパニョール銀 (バンコ・ポプラーレ) は同行の買取に関心がないかと、競合銀行に打診した。その翌日には不動産会社の持ち株を売却して資金を調達し、18 日には自行が発行した高リスク債券について 7 月の利払いを実施できると発表し、市場の不安解消に努めた」と報じている。2017 年 5 月中旬以降の市場価格の急激な下落は、発行体の信用力ないしは AT1 債の信用リスクが投資家に十分に認知されたために、POP_AT1 債の保有者が自らの売却したい価格で売却できない流動性リスクによってもたらされた可能性が推測される。

4.2 完全情報下と不完全情報下での AT1 債モデル価格の比較

モデル価格と市場価格がある程度整合的に推移している状況がいくつか観測された一方で、モデル価格と市場価格の水準や推移の様態に大きな乖離が生じた要因としては、主に以下のような仮説を挙げることができると考えている。

- (1) 市場価格が本論文のプライシングモデルにて表現されている信用リスク以外のリスク、例えば流動性リスクや利払い消滅リスク、償還時期の不確実性をも織り込んでプライシングされていること
- (2) アウトサイダーである投資家が入手できる発行体の財務データの量や正確性に問題があることから、プライシングモデルにおける情報 (フィルトレーション) の前提が現実世界の実態と整合的でないこと

ここでは上記仮説のうち、(2) の要因に着目して不完全情報を考慮した場合のプライシングの変化を調べる。

不完全情報の下で算出した AT1 債のモデル価格 $P_{t,T}^{\text{ACC,PONV,Imp}}$ は、 $P_{t,T}^{\text{ACC,PONV}}$ と停止時刻の設定は同じであるが、発行体の資産価値過程および CET1 比率過程が完全に把握できない不完全情報下でのプライシングによって得られたモデル価格である。したがって、 $P_{t,T}^{\text{ACC,PONV,Imp}}$ は、 $P_{t,T}^{\text{ACC,PONV}}$ の差は、発行体に関する情報が正確に把握できるか否かという前提の差異によって生じるものであると解釈できる。

実際の分析では、不完全情報下での発行体の資産価値 V_0 が対数正規分布に従うというモデルにおける会計情報ノイズ σ_{AN} に様々な数値を与えて、不完全情報下の AT1 債のモデル価格を算出したが、市場価格および完全情報下のモデル価格の水準との対比しやすさを考慮して、MUFG_AT1 債については 10% の場合、POP_AT1 債については、25% と

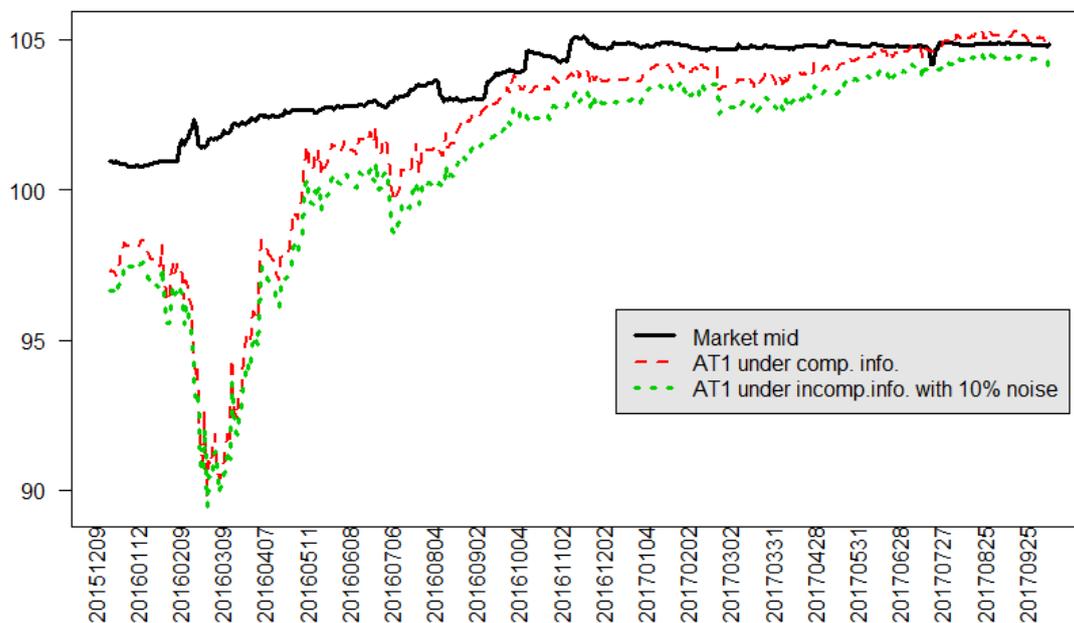


Fig. 2. Daily changes of the market mid price and some model prices of MUFG_AT1 bond. The model prices are given the AT1 bond pricing model by under both complete and incomplete information. The solid line: the market mid price of the underlying MUFG_AT1 bond. The dash line: the model price $P_{t,T}^{\text{ACC,PONV}}$ from the pricing model with both accounting and PONV triggers under complete information. The dotted line: the model price $P_{t,T}^{\text{ACC,PONV,Imp}}$ from the corresponding AT1 bond pricing model under incomplete information, where the accounting noise is given by $\sigma_{\text{AN}} = 10\%$.

50% の 2 種類の場合についてのみ結果を示すことにする。

Fig. 2 は、MUFG_AT1 債の市場価格と、完全情報および不完全情報下での AT1 債のモデル価格の日次推移を比較しているグラフである。ここでは、財務トリガーと PONV トリガーの両方を考慮している。10% という会計情報ノイズでも、市場価格に比べて完全情報下のモデル価格よりもさらに不完全情報下のモデル価格が低い水準で推移していることが分かる。このことから、MUFG_AT1 債に関しては、資産価値過程の不完全情報を考慮することはリスクを過大評価しすぎる可能性があることが示唆される。

一方で Fig. 3 は、POP_AT1 債の市場価格と、完全情報および 25% と 50% という二つの会計情報ノイズに対する不完全情報下での AT1 債のモデル価格の日次推移を比較しているグラフである。

これより、会計情報ノイズを 50% とした不完全情報下のモデル価格の水準が、発行体であるバンコ・ポプラーンに対してペイルインが実施される約 1 年前の 2016 年 6 月から、2016 年度第 4 四半期（2016 年度決算）が発表された直後である 2017 年 2 月下旬頃までの期間において、市場価格の推移にある程度整合的であることが見てとれる。

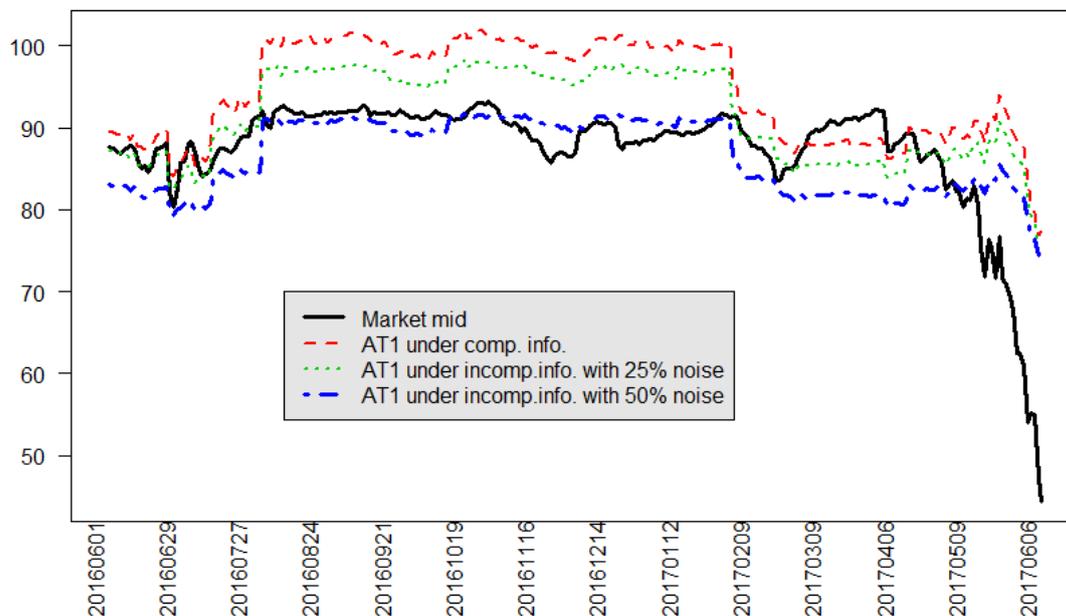


Fig. 3. Daily changes of the market mid price and some model prices of POP_AT1 bond. The model prices are given the AT1 bond pricing model by under both complete and incomplete information. The solid line: the market mid price of the underlying POP_AT1 bond. The dash line: the model price $P_{i,T}^{ACC,PONV}$ from the pricing model with both accounting and PONV triggers under complete information. The dotted line: the model price $P_{i,T}^{ACC,PONV,Imp}$ from the corresponding AT1 bond pricing model under incomplete information, where the accounting noises are given by $\sigma_{AN} = 25\%$ and $\sigma_{AN} = 50\%$.

このことは、MUFG_AT1 債とは対照的に、POP_AT1 債のリスクに関しては、25% という比較的高めと見なせる会計情報ノイズを考慮しても不十分であり、資産価値過程の不透明性を十分に考慮しないと同債券のリスクを過小評価してしまう可能性が高いことを示唆していると考えられる。

これらの結果から、MUFG_AT1 債においても POP_AT1 債においても、不完全情報の下で算出されたモデル価格が、完全情報下でのモデル価格の水準をさらに押し下げるといふ結果が確認されている。

しかし、不完全情報の設定がモデル価格にもたらす影響については、同じ停止時刻の設定によって算出されるモデル価格が、前提とするフィルトレーションの違いによってどの程度変動するのかを確認する方が、より直感的な理解を得られる可能性がある。

Fig. 4 は、普通社債モデルおよび財務トリガーと PONV トリガーの両方を考慮した AT1 債モデルに関して、完全情報下と不完全情報下でのモデル価格の差異率を営業日ごとに算出し、日次推移を表したものである。

会計情報ノイズ σ_{AN} は、MUFG については 10%、バンコ・ポプラーンについては 25% で設定してモデル価格を算出している。

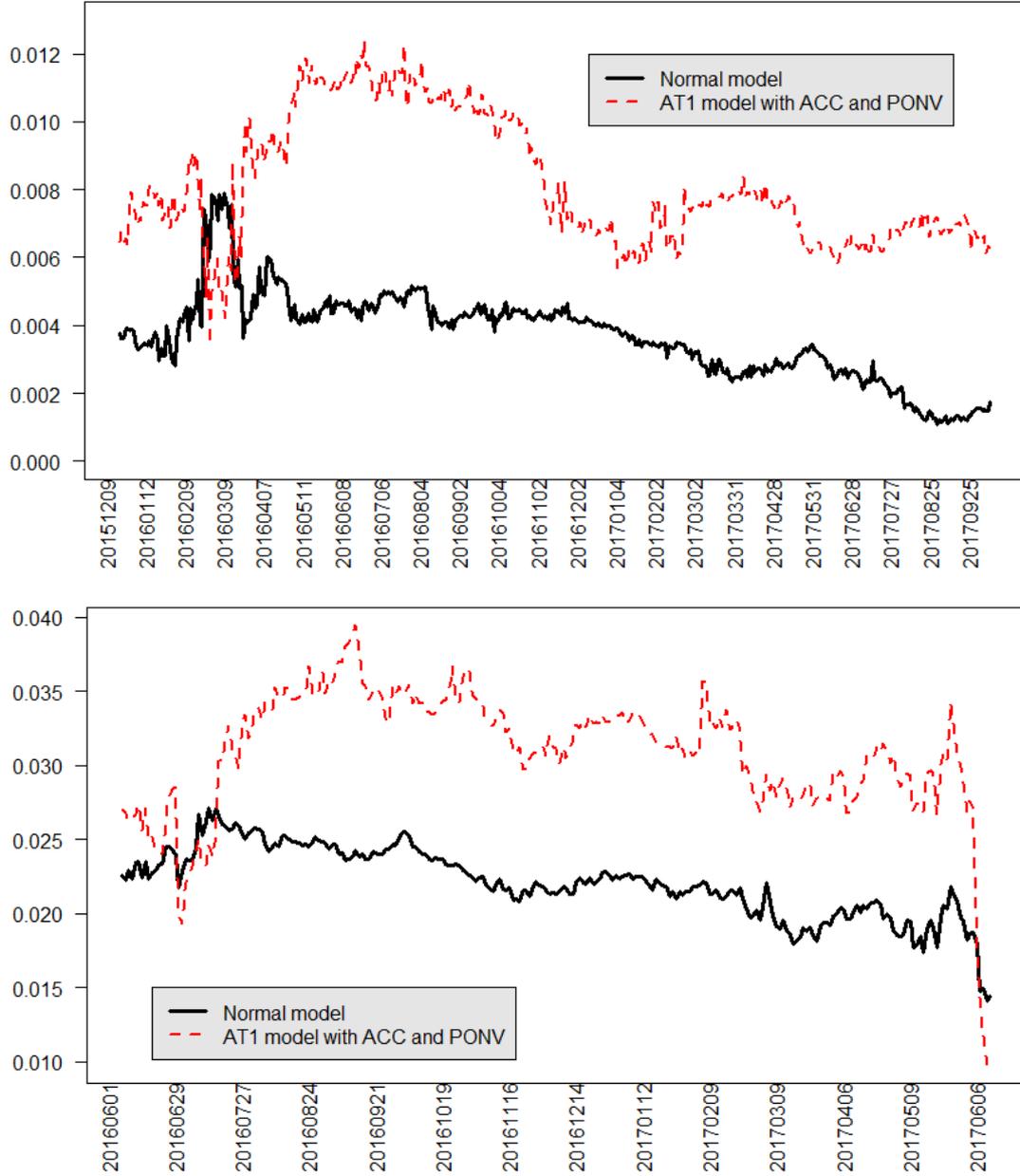


Fig. 4. Comparison of daily changes of the relative gap between the theoretical prices under complete information and those under incomplete information (top: MUFG_AT1, bottom: POP_AT1). The normal line corresponds to the relative gap for the normal corporate bond model $(P_{i,T}^{\text{Def}} - P_{i,T}^{\text{Def,Imp}})/P_{i,T}^{\text{Def}}$, while the dash line does for the AT1 bond pricing model with both accounting and PONV triggers $(P_{i,T}^{\text{ACC,PONV}} - P_{i,T}^{\text{ACC,PONV,Imp}})/P_{i,T}^{\text{ACC,PONV}}$, where the accounting noise σ_{AN} is 10% for MUFG_AT1 and 25% for POP_AT1.

不完全情報下で算出されたモデル価格が、完全情報下で算出されたモデル価格からどの程度変動（下落）するのかを普通社債のモデル価格と AT1 債のモデル価格とで比較したところ、リスクフリーレート対比で CDS スプレッドが高水準であった期間を除いて、概して AT1 債の価格変動率の方が普通社債の価格変動率よりも高くなるという結果を得た。

当該結果は、発行体について不完全な情報しか得られない状況で算出されるモデル価格が、特に AT1 債において、完全情報の下で算出されるモデル価格から著しくかけ離れた値になってしまうリスクがあることを示唆していると考えられる。

本論文の AT1 債のプライシングモデルは、AT1 債の市場価格を「当てる」ことを目的とするものではない。本論文の AT1 債プライシングモデルは、財務データや市場データ、AT1 債の契約条件によってもたらされる信用リスクの一部を反映させたものである一方、現実の AT1 債の市場価格は、多くの場合において本論文の AT1 債プライシングモデルに織り込まれた要素のみを反映して決定されている訳ではないからである。

むしろ、プライシングモデルから算出されたモデル価格が示唆する事象について読み取ることや、モデル価格と市場価格を比較することを通して、主に信用リスクの観点から AT1 債の特徴について理解を深めていくことを主眼としている。

上記の観点でいえば、本論文のプライシングモデルは、債券の信用リスクが反映されたモデル価格という尺度によって AT1 債と普通社債の差異を可視化したということに一定の貢献があったといえるだろう。さらに、発行体について不完全な情報しか得られない状況で算出されるモデル価格が、特に AT1 債において、完全情報の下で算出されるモデル価格から著しくかけ離れた値となってしまうリスクがあることについても認識するに至った。

また、モデル価格と市場価格の差異について、現実の世界で発生した事象を踏まえながら分析をおこなうと、信用リスクに裏付けられたモデル価格を基準に市場価格の妥当性について考察を与えることが可能となる。また、信用リスクだけでは説明の難しい要因によって AT1 債の市場価格が変動するリスクについて認識することが可能となったという点でも、一定の成果を得られたものと考えられる。

5. まとめと今後の課題

本論文では、金融機関が発行するハイブリッド証券の一種である「バーゼル III 適格 Additional Tier 1 債券 (AT1 債)」について、先行研究を拡張したプライシングモデルの設定と、実際に発行された日欧二つの債券を用いての実証分析をおこなった。

1 節で述べたように、本論文におけるモチベーションとして、実証分析を通して明らかにしようとする課題を以下のように設定した。

- (1) 財務トリガーや PONV トリガーへの抵触条件を適切に定式化することで、構造型モデルの枠組みで AT1 債のプライシングモデルを設定すること。

- (2) 投資家は発行体の資産価値に対して不完全情報しか持ちえないということをプライシングに反映させる適切なモデルを設定すること。
- (3) 本論文で提案するプライシングモデルに基づく理論価格と実際の AT1 債の市場価格を比較して、本論文で提案するプライシングモデルの有用性について検討すること。

これらの課題に対しては、主に以下のような形で成果が得られた。

- (1) 従来のモデルでは外生的に扱われることが多い「PONV トリガー」についても、ある閾値に対する発行体の資産価値過程の初到達条件として特徴付けをおこなった。くわえて、CET1 比率で特徴付けられる「財務トリガー」についても、CET1 比率が資産価値の確定的な関数として与えられるという仮定の下で、資産価値過程に対する初到達条件として定式化した。その結果、資産価値過程のみでプライシングモデルを完結させることができ、資産価値の変動リスク、AT1 債の有する強制元本削減トリガー条項、AT1 債の条件付消滅確率、およびモデルの与える理論価格などの関係を、財務状況という視点で統一的に解釈できるようになった。
- (2) 発行体の資産価値過程を直接観測することが不可能であるという不完全情報アプローチの枠組みでの AT1 債のプライシングモデルを議論した。特に評価時点における真の資産価値が対数正規分布に従うという単純な仮定の下で、AT1 債の理論価格シミュレーションがおこなえるモデルを導入した。
- (3) 実際に発行されている日欧二つの AT1 債の契約条件および市場データから推定されたパラメータを用いて、本論文で提案する「財務トリガーおよび PONV トリガーを資産過程の初到達条件として定式化する構造型の不完全情報プライシングモデル」に基づく理論価格のシミュレーションを実施し、従来の構造型モデルと提案モデルの理論価格の差異、および市場価格と提案モデルの理論価格との乖離状況を観察した。その結果、市場価格が相対的に低い局面において、本論文で新たに提案した AT1 債プライシングモデルが他の構造型モデルと比べて市場価格に近い水準で推移している状況がいくつか観測され、提案した AT1 債プライシングモデルは課題が残っているが、適切に改良することで実務への応用可能性が十分にあると推察される。

最後に、本論文の追加的な課題について述べておく。

本論文で設定したプライシングモデルは、モデルの設定者によってさらなる追加的な拡張が可能であると考えている。例えば、AT1 債にかかる利払い消滅のリスクをモデル価格に織り込むことを検討するのであれば、発行体の資産価値過程や CET1 比率過程に対して、一定の水準を下回った際に利息の支払いを制限するような停止時刻を設定することで、当該リスクをモデル価格に反映させることができるだろう。

ただし、プライシングモデルの設定においてモデル設定者が独自に決定する要素が多く

なりすぎてしまうと、モデル価格が恣意性を増す要因につながったり、モデル価格の解釈が困難になったりする恐れが生じる。プライシングモデルを設定する際には、どのような特徴をモデルに組み込むべきか、また逆に、どのような特徴を「組み込んでいないか」をモデル使用者と共有することが重要であるといえよう。

また、発行体の資産価値と CET1 比率の関係式について、本論文では Rösler [16] の手法に倣って設定をおこなったが、変換式のパラメータを推定するにあたり、発行体の財務データとバーゼル規制上の指標である CET1 比率の関係はそれほど単純ではない。

BCBS [3] では、「バーゼル III の最終化」として、主に銀行間におけるリスクアセット算出における「過度なばらつき (“excessive variability”）」を軽減するため、リスクアセットの計上方法の見直しがなされた。リスクアセットは規制上の自己資本比率を算出する際の「分母」に用いる数値であり、当該基準が変化すると、基準変更前後のデータをそのままの形でパラメータ推定の際に用いることが難しくなる可能性がある*1。そのため、本論文の構造型プライシングモデルのフレームワークにおいては、CET1 比率過程を合理的にモデル化する方法について、さらなる検討の余地があると考えている。

Appendix A. 完全情報下での条件付き生存確率

2.1.5 節で検討した、完全情報下での条件付き生存確率 $\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i | \mathcal{G}_t)$ の計算は、(2.17) 式で定義される関数 $F(t, u; x, y)$ に帰着することを示した。本文において実証分析においては、この関数に相当する部分の計算をナイーブなモンテカルロ・シミュレーションでおこなっているが、で定義される確率過程 $(X_s)_{s \leq t}$ がドリフト付きのブラウン運動と見なせることから、ある程度解析的に議論することも可能である。

ただし、計算においては確率過程 (X_s) の有限区間 $[t, u]$ ($t < u$) における最小値の挙動を考える必要があるが、財務トリガー条件に関しては $[t, t_i] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}$ という離散時点上の最小値しか考えていないことに注意する必要がある。なお、ここでは簡単のため、発行体の四半期決算時点の離散時刻集合 $\mathcal{T}_{\text{qtr}} = \{0.25k - t_0 \mid k \in \mathbb{N}\}$ について $t_0 =$ を仮定して $\mathcal{T}_{\text{qtr}} = \{0.25, 0.5, 0.75, 1, \dots\}$ として考えることにする。

もし $[t, u] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}} = \emptyset$ のときは、 $\inf_{s \in [t, u] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}} X_s > y$ という条件について考える必要がないので、Bielecki et al. [4] の Proposition 1.3.3 より

$$\begin{aligned} F(t, u; x, y) &= \mathbf{Q} \left(\inf_{s \in [t, u]} X_s > x, \inf_{s \in [t, u] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}} X_s > y \mid X_t = 0 \right) \\ &= \mathbf{Q} \left(\inf_{s \in [t, u]} X_s > x \mid X_t = 0 \right) \\ (\text{Appendix A.1}) \quad &= p_{u-t}(x) \end{aligned}$$

*1 BCBS [3] によれば、本資料にて定められた基準は 2022 年 1 月 1 日から適用（一部の項目は段階を踏んでの適用）開始となることである。

となる。

ただし, $u > 0, x \leq 0$ に対して $p_u(x)$ を

$$\begin{aligned} p_u(x) &:= \mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [0, u]} \tilde{X}_s > x\right) \\ (\text{Appendix A.2}) \quad &= \Phi\left(\frac{-x + (r - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2})u}{\sigma_V \sqrt{u}}\right) - e^{\left(\frac{2(r-\delta)}{\sigma_V^2} - 1\right)x} \Phi\left(\frac{x + (r - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2})u}{\sigma_V \sqrt{u}}\right) \end{aligned}$$

と定義している. なお, $\tilde{X}_t = \left(r - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)t + \sigma_V W_t$ としており, $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布関数である.

次に, ある $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{N}$ に対して, $[t, u] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}} = \{0.25k \mid k = j+1, \dots, j+n\}$ となっているときは

$$\begin{aligned} F(t, u; x, y) &= \mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [t, u]} X_s > x, \inf_{s \in [t, u] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}} X_s > y \mid X_t = 0\right) \\ &= \mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [t, u]} X_s > x, X_{0.25(j+1)} > y, \dots, X_{0.25(j+n)} > y \mid X_t = 0\right) \\ &= \int_y^\infty \cdots \int_y^\infty \mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [0.25(j+n), u]} X_s > x \mid X_{0.25(j+n)} = x_n\right) \\ &\quad \times \mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [0.25(j+n-1), 0.25(j+n)]} X_s > x, X_{0.25(j+n)} = x_n \mid X_{0.25(j+n-1)} = x_{n-1}\right) \\ &\quad \times \cdots \times \mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [t, 0.25(j+1)]} X_s > x, X_{0.25(j+1)} = x_1 \mid X_t = 0\right) dx_1 \cdots dx_{n-1} dx_n \end{aligned}$$

と表すことができる.

まず, (Appendix A.2) 式を用いると, $\mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [0.25(j+n), u]} X_s > x \mid X_{0.25(j+n)} = x_n\right) = p_{u-0.25(j+n)}(x - x_n)$ と表されることに注意する.

さらに, 一般的に $u_1 < u_2$ および $x \leq y, x \leq 0$ に対して, $\mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [u_1, u_2]} X_s > x, X_{u_2} = y \mid X_{u_1} = z\right)$ は $\mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [0, u_2 - u_1]} X_s > x - z, X_{u_2 - u_1} = y - z \mid X_0 = 0\right)$ と等しいことが分かる. したがって, $x - z$ を反射壁とする (\tilde{X}_s) の (斉時的な) 推移密度関数として求めることができる. これを $q_{u_2 - u_1}(z, y; x)$ とおく.

Bielecki et al. [4] の Proposition 1.3.3 より,

$$\begin{aligned}
q_{u_2-u_1}(z, y; x) &= \mathbf{Q} \left(\inf_{s \in [0, u_2-u_1]} X_s > x - z, X_{u_2-u_1} = y - z \mid X_0 = 0 \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \Phi \left(\frac{-(y-z) + (r - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2})(u_2 - u_1)}{\sigma_V \sqrt{u_2 - u_1}} \right) \right. \\
&\quad \left. - e^{\left(\frac{2(r-\delta)}{\sigma_V^2} - 1 \right)(x-z)} \Phi \left(\frac{(2x - y - z) + (r - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2})(u_2 - u_1)}{\sigma_V \sqrt{u_2 - u_1}} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_V \sqrt{2\pi(u_2 - u_1)}} \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{-(y-z) + (r - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2})(u_2 - u_1)}{\sigma_V \sqrt{u_2 - u_1}} \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. \exp \left(\left(\frac{2(r-\delta)}{\sigma_V^2} - 1 \right)(x-z) - \frac{1}{2} \left(\frac{2x - y - z + (r - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2})(u_2 - u_1)}{\sigma_V \sqrt{u_2 - u_1}} \right)^2 \right) \right\}
\end{aligned}$$

(Appendix A.3)

$$=: q_{u_2-u_1}(z, y; x)$$

が得られることに注意する.

よって, (Appendix A.2), (Appendix A.3) 式の表記を用いると, $[t, u] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}} = \{0.25k \mid k = j+1, \dots, j+n\}$ のとき, 条件付き生存確率は

$$\begin{aligned}
F(t, u; x, y) &= \int_y^\infty \cdots \int_y^\infty p_{u-0.25(j+n)}(x - x_n) \left[\prod_{j=2}^n q_{0.25}(x_{j-1}, x_j; x) \right] \\
&\quad \times q_{0.25(j+1)-t}(0, x_1; x) dx_1 \cdots dx_{n-1} dx_n
\end{aligned}$$

という n 重積分で計算することができ.

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP17K01248 の助成を受けておこなわれた.

参考文献

- [1] Basel Committee on Banking Supervision. “Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems,” *Bank for international Settlements*, 2011.
- [2] Basel Committee on Banking Supervision. “Composition of capital disclosure requirements: Rules text,” *Bank for international Settlements*, 2012.
- [3] Basel Committee on Banking Supervision. “Basel III: Finalising post-crisis reforms,” *Bank for international Settlements*, 2017.

- [4] Bielecki, T. R., Jeanblanc, M., and Rutkowski, M. *Credit Risk Modeling*, Osaka University Press, 2009.
- [5] Black, F. and Cox, J.C. “Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions,” *Journal of Finance*, 31:351-367, 1976.
- [6] De Spiegeleer, J. and Höcht, S. and Marquet, I. and Schoutens, W. “CoCo Bonds and Implied CET1 Volatility,” *Quantitative Finance*, 17 (2017), 813-824.
- [7] De Spiegeleer, J. and Schoutens, W. “Pricing contingent convertibles: A derivatives approach,” *Journal of Derivatives*, 20 (2012), 27-36.
- [8] Duffie, D. and Lando, D. “Term structure of credit risk with incomplete accounting information” *Econometrica*, 69 (2001), 633-664.
- [9] Frey, R., Rösler, L. and Lu, D. “Corporate Security Prices in Structural Credit Risk Models with Incomplete Information,” *Mathematical Finance*, 29 (2019), 84-116.
- [10] Frey, R. and Schmidt, T. “Pricing corporate securities under noisy asset information,” *Mathematical Finance*, 19 (2009), 403-421.
- [11] Karatzas, I. and Shreve, S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus: 2nd edition*, Springer-Verlag New York, 1998.
- [12] Leland, H. E. and Toft, K. “Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads” *Journal of Finance*, 51 (1996), 987-1019.
- [13] Liberadzki, K. and Liberadzki, M. *Hybrid Securities: Structuring, Pricing and Risk Assessment*, Palgrave Macmillan, 2016.
- [14] McNeil, A. J., Frey, R., and Embrechts, P. *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press, 2nd edition, 2015.
- [15] Merton, R. C. “On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates,” *Journal of Finance*, 29 (1974), 449-470.
- [16] Rösler, L. “Stochastic Filtering in Pricing and Credit Risk Management,” *PhD thesis*, TU Wien, 2016
(<http://katalog.ub.tuwien.ac.at/AC13002123> last access: February 20, 2019).

杉山 泰平 (正会員) 〒101-8439 東京都千代田区一ツ橋 2-1-2

2018 年一橋大学大学院国際企業戦略研究科専門職学位課程修了。経営修士（専門職）「金融戦略・経営財務 MBA」。現在、金融関係の企業に勤務。

中川 秀敏 (正会員) 〒101-8439 東京都千代田区一ツ橋 2-1-2

2000 年東京大学大学院数理科学研究科博士課程修了。博士（数理科学）。現在、一橋大

学大学院経営管理研究科教授。日本応用数学会、日本金融・証券計量・工学学会（ジャーナル）などに所属。金融リスク、特に信用リスクのモデル化を専門とする。